［2009 名古屋大］

---

1　$a>0$，$b>0$ とする。点 A$(0,\ a)$ を中心とする半径 $r$ の円が，双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と 2 点 B$(s,\ t)$，C$(-s,\ t)$ で接しているとする。ただし，$s>0$ とする。ここで，双曲線と円が点 P で接するとは，P が双曲線と円の共有点であり，かつ点 P における双曲線の接線と点 P における円の接線が一致することである。

(1)　$r$，$s$，$t$ を，$a$ と $b$ を用いて表せ。

(2)　△ABC が正三角形となる $a$ と $r$ が存在するような $b$ の値の範囲を求めよ。

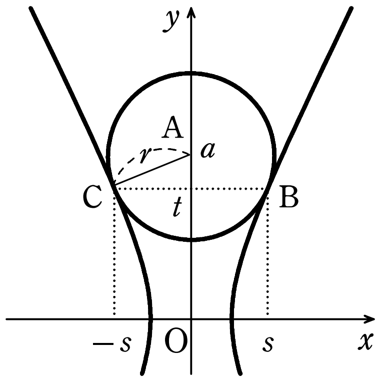
解説

(1)　[解 1]　点 A$(0,\ a)$ を中心とする半径 $r$ の円の方程式は

$$x^2+(y-a)^2=r^2$$

両辺を $x$ で微分すると

$$2x+2(y-a)\frac{dy}{dx}=0$$




$y\fallingdotseq a$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y-a}$　　また，

$x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の両辺を $x$ で微分すると　$2x-\dfrac{2y}{b^2}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

$y\fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b^2x}{y}$

双曲線と円が点 B $(s,\ t)$ で接するので

$$s^2+(t-a)^2=r^2 \quad \cdots\cdots ①$$

$$s^2-\frac{t^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots ②$$

$$-\frac{s}{t-a}=\frac{b^2s}{t} \quad \cdots\cdots ③$$

$s\fallingdotseq 0$ であるから ③ より　$-t=b^2(t-a)$

よって　$t=\dfrac{ab^2}{1+b^2}$　……④

②，④ から　$s^2=1+\dfrac{a^2b^2}{(1+b^2)^2}$

$s>0$ であるから　$s=\sqrt{1+\dfrac{a^2b^2}{(1+b^2)^2}}$　……⑤

①，④，⑤ から　$r^2=1+\dfrac{a^2b^2}{(1+b^2)^2}+\dfrac{a^2}{(1+b^2)^2}=\dfrac{1+a^2+b^2}{1+b^2}$

$r>0$ であるから　$r=\sqrt{\dfrac{1+a^2+b^2}{1+b^2}}$

［解 2］ B$(s,\ t)$ における双曲線の接線の方程式は $\quad sx-\dfrac{ty}{b^2}=1$

よって，B$(s,\ t)$ における法線の方程式は $\quad \dfrac{t}{b^2}(x-s)+s(y-t)=0$

この法線が円の中心 A$(0,\ a)$ を通るから $\quad -\dfrac{st}{b^2}+s(a-t)=0$

$s \neq 0$ であるから $\quad -t+b^2(a-t)=0$ $\quad$ よって $\quad t=\dfrac{ab^2}{1+b^2}$

$(s,\ t)$ は双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上にあるから $\quad s^2-\dfrac{t^2}{b^2}=1$

$s>0$ であるから $\quad s=\sqrt{1+\dfrac{t^2}{b^2}}=\sqrt{1+\dfrac{a^2b^2}{(1+b^2)^2}}$

2 点 A，B の距離が円の半径 $r$ に等しいので

$$r^2=s^2+(t-a)^2=1+\frac{a^2b^2}{(1+b^2)^2}+\left(\frac{ab^2}{1+b^2}-a\right)^2$$

$$=1+\frac{a^2b^2}{(1+b^2)^2}+\frac{a^2}{(1+b^2)^2}=1+\frac{a^2}{1+b^2}=\frac{1+a^2+b^2}{1+b^2}$$

$r>0$ であるから $\quad r=\sqrt{\dfrac{1+a^2+b^2}{1+b^2}}$

(2) AB$=$AC は常に成り立つから，△ABC が正三角形となる条件は AB$=$BC が成り立つことである。

よって $\quad r=2s \quad$ $s>0$，$r>0$ より $\quad r^2=4s^2$

(1) の結果を代入して $\quad \dfrac{1+a^2+b^2}{1+b^2}=4\left\{1+\dfrac{a^2b^2}{(1+b^2)^2}\right\}$

分母を払って $\quad (1+b^2)(1+a^2+b^2)=4\{(1+b^2)^2+a^2b^2\}$

$a$ について整理すると $\quad (1-3b^2)a^2=3(1+b^2)^2$

この式を満たすような正の実数 $a$ が存在するためには

$3(1+b^2)^2>0$ であるから $\quad 1-3b^2>0$

これを解いて $\quad -\dfrac{1}{\sqrt{3}}<b<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$b>0$ であるから $\quad 0<b<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

このとき (1) の結果から $r$ も存在する。

したがって，求める $b$ の値の範囲は $\quad 0<b<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\boxed{2}$ $x$，$y$ を正の整数とする。

(1) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ を満たす組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

(2) $p$ を 3 以上の素数とする。$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{p}$ を満たす組 $(x,\ y)$ のうち，$2x+3y$ を最小にする $(x,\ y)$ を求めよ。

解説

(1) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ から　　$8y+4x=xy$

よって　　$(x-8)(y-4)=32$　…… ①

また，$x>0$，$y>0$ から　　$x-8>-8$，$y-4>-4$　…… ②

①，② を満たす整数 $x-8$，$y-4$ の組は

$$(x-8,\ y-4)=(1,\ 32),\ (2,\ 16),\ (4,\ 8),\ (8,\ 4),\ (16,\ 2),\ (32,\ 1)$$

よって　　$(x,\ y)=(9,\ 36),\ (10,\ 20),\ (12,\ 12),\ (16,\ 8),\ (24,\ 6),\ (40,\ 5)$

(2) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{p}$ から　　$2py+px=xy$

よって　　$(x-2p)(y-p)=2p^2$　…… ③

また，$x>0$，$y>0$ から　　$x-2p>-2p$，$y-p>-p$　…… ④

$p$ は 3 以上の素数であるから，$2p^2$ の正の約数は　　$1,\ 2,\ p,\ 2p,\ p^2,\ 2p^2$

ゆえに，③，④ を満たす整数 $x-2p$，$y-p$ の組と，そのときの $x$，$y$，$2x+3y$ の値は，次の表のようになる。

| $x-2p$ | $1$ | $2$ | $p$ | $2p$ | $p^2$ | $2p^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y-p$ | $2p^2$ | $p^2$ | $2p$ | $p$ | $2$ | $1$ |
| $x$ | $2p+1$ | $2p+2$ | $3p$ | $4p$ | $p^2+2p$ | $2p^2+2p$ |
| $y$ | $2p^2+p$ | $p^2+p$ | $3p$ | $2p$ | $p+2$ | $p+1$ |
| $2x+3y$ | $6p^2+7p+2$ | $3p^2+7p+4$ | $15p$ | $14p$ | $2p^2+7p+6$ | $4p^2+7p+3$ |

ここで，$p\geqq 3$ であるから

$$(6p^2+7p+2)-(4p^2+7p+3)=2p^2-1>0$$
$$(4p^2+7p+3)-(3p^2+7p+4)=p^2-1>0$$
$$(3p^2+7p+4)-(2p^2+7p+6)=p^2-2>0$$
$$(2p^2+7p+6)-15p=2p^2-8p+6=2(p-1)(p-3)\geqq 0$$
$$15p-14p=p>0$$

よって　　$6p^2+7p+2>4p^2+7p+3>3p^2+7p+4>2p^2+7p+6\geqq 15p>14p$

表より，$2x+3y=14p$ のとき　　$(x,\ y)=(4p,\ 2p)$

したがって，$2x+3y$ を最小にする $(x,\ y)$ は　　$(x,\ y)=(4p,\ 2p)$

$\boxed{3}$ さいころを投げると，1 から 6 までの整数の目が等しい確率で出るとする。さいころを $n$ 回（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）投げるとき，出る目の積の一の位が $j$（$j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 9$）となる確率を $p_n(j)$ とする。

(1) $p_2(0)$，$p_2(1)$，$p_2(2)$ を求めよ。

(2) $p_{n+1}(1)$ を，$p_n(1)$ と $p_n(7)$ を用いて表せ。

(3) $p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)$ を求めよ。

解説

(1) さいころを 2 回投げて，$j=0$ となるのは，

(1 回目，2 回目)$=(2,\ 5)$，$(4,\ 5)$，$(6,\ 5)$，$(5,\ 2)$，$(5,\ 4)$，$(5,\ 6)$ の 6 通りであるから

$$p_2(0)=\frac{6}{6^2}=\frac{1}{6}$$

$j=1$ となるのは，(1 回目，2 回目)$=(1,\ 1)$ の 1 通りであるから

$$p_2(1)=\frac{1}{6^2}=\frac{1}{36}$$

$j=2$ となるのは，(1 回目，2 回目)$=(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$，$(2,\ 6)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 3)$，$(6,\ 2)$ の 6 通りであるから

$$p_2(2)=\frac{6}{6^2}=\frac{1}{6}$$

(2) $n+1$ 回投げて $j=1$ となるのは，

［1］ $n$ 回までの目の積の一の位が 1 で，$n+1$ 回目に 1 が出る。

［2］ $n$ 回までの目の積の一の位が 7 で，$n+1$ 回目に 3 が出る。

のどちらかの場合だけである。

よって $$p_{n+1}(1)=\frac{1}{6}p_n(1)+\frac{1}{6}p_n(7)$$

(3) $n$ 回投げて目の積の一の位が「1 または 3 または 7 または 9」すなわち「5 以外の奇数」となるのは，$n$ 回とも 2，4，5，6 以外の目が出る場合，すなわち $n$ 回とも 1 または 3 が出る場合であるから

$$p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)=\left(\frac{2}{6}\right)^n=\frac{1}{3^n}$$

$\boxed{4}$ さいころを投げると，1 から 6 までの整数の目が等しい確率で出るとする。さいころを $n$ 回（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）投げるとき，出る目の積の一の位が $j$（$j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 9$）となる確率を $p_n(j)$ とする。

(1) $p_2(0)$，$p_2(1)$，$p_2(2)$ を求めよ。

(2) $p_{n+1}(1)$ を，$p_n(1)$ と $p_n(7)$ を用いて表せ。

(3) $p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)$ を求めよ。

(4) $p_n(5)$ を求めよ。

(解説)

(1) さいころを 2 回投げて，$j=0$ となるのは，

(1 回目，2 回目)$=(2,\ 5),\ (4,\ 5),\ (6,\ 5),\ (5,\ 2),\ (5,\ 4),\ (5,\ 6)$

の 6 通りであるから $p_2(0)=\dfrac{6}{6^2}=\dfrac{1}{6}$

$j=1$ となるのは，(1 回目，2 回目)$=(1,\ 1)$ の 1 通りであるから

$$p_2(1)=\frac{1}{6^2}=\frac{1}{36}$$

$j=2$ となるのは，

(1 回目，2 回目)$=(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2)$

の 6 通りであるから $p_2(2)=\dfrac{6}{6^2}=\dfrac{1}{6}$

(2) $n+1$ 回投げて $j=1$ となるのは，次の [1]，[2] のいずれかの場合である。

[1] $n$ 回までの目の積の一の位が 1 で，$n+1$ 回目に 1 が出る。

[2] $n$ 回までの目の積の一の位が 7 で，$n+1$ 回目に 3 が出る。

よって $p_{n+1}(1)=\dfrac{1}{6}p_n(1)+\dfrac{1}{6}p_n(7)$

(3) $n$ 回投げて $j$ が「1 または 3 または 7 または 9」すなわち「5 以外の奇数」となるのは，$n$ 回とも 2，4，5，6 以外の目が出る場合，すなわち $n$ 回とも 1 または 3 が出る場合である。

よって $p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)=\left(\dfrac{2}{6}\right)^n=\dfrac{1}{3^n}$

(4) $n$ 回投げて $j=5$ となる確率は，$j$ が奇数となる確率から $j=1,\ 3,\ 7,\ 9$ となる確率を引いたものである。

よって，求める確率 $p_n(5)$ は，$n$ 回とも奇数が出る確率から (3) の確率を引いたもので

$$p_n(5)=\left(\frac{3}{6}\right)^n-\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}$$

$\boxed{5}$ 放物線 $y=ax^2$ $(a>0)$ と円 $(x-b)^2+(y-1)^2=1$ $(b>0)$ が，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ で接しているとする。ただし，$0<p<b$ とする。この円の中心 Q から $x$ 軸に下ろした垂線と $x$ 軸との交点を R としたとき，$\angle\mathrm{PQR}=120°$ であるとする。ここで，放物線と円が点 P で接するとは，P が放物線と円の共有点であり，かつ点 P における放物線の接線と点 P における円の接線が一致することである。

(1)　$a$，$b$ の値を求めよ。

(2)　点 P と点 R を結ぶ短い方の弧と $x$ 軸，および放物線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(解説)

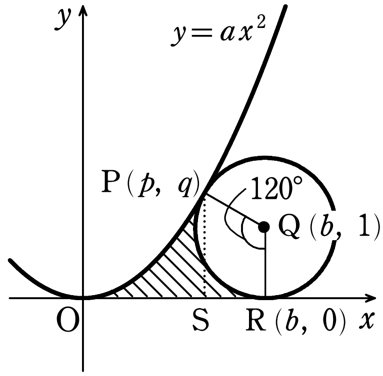
(1)　P$(p,\ q)$，Q$(b,\ 1)$，R$(b,\ 0)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(p-b,\ q-1),\ \overrightarrow{\mathrm{QR}}=(0,\ -1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ のなす角は 120° であるから　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=|\overrightarrow{\mathrm{QP}}||\overrightarrow{\mathrm{QR}}|\cos 120^\circ$

よって　$(p-b)\cdot 0+(q-1)\cdot(-1)=1\cdot 1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)$　　ゆえに　$q=\dfrac{3}{2}$

$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|^2=1$ であるから　$(p-b)^2+\left(\dfrac{3}{2}-1\right)^2=1$




よって　$(p-b)^2=\dfrac{3}{4}$

$b-p>0$ より　$b-p=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ゆえに　$b=p+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　……①

直線 PQ の傾きは　$\dfrac{q-1}{p-b}=\dfrac{\dfrac{3}{2}-1}{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって，放物線 $y=ax^2$ の点 P における接線の傾きは $\sqrt{3}$ であり，$y'=2ax$ であるから　$2ap=\sqrt{3}$

したがって　$ap=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　……②

点 P は放物線 $y=ax^2$ 上にあるから　$q=ap^2$　すなわち　$\dfrac{3}{2}=ap\cdot p$

② を代入して　$\dfrac{3}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}p$　　ゆえに　$p=\sqrt{3}$

$p=\sqrt{3}$ と ②，① から　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

(2)　P から $x$ 軸に下ろした垂線と $x$ 軸の交点を S とすると，求める面積は

$$\int_0^p ax^2dx+(\text{台形 PQRS の面積})-(\text{扇形 QPR の面積})$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{2}x^2dx+\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\pi\cdot 1^2\times\frac{1}{3}$$

$$=\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^{\sqrt{3}}+\frac{5\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{3}=\frac{9\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{3}$$

$\boxed{6}$ 空間のベクトル $\overrightarrow{OA}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{OB}=(a,\ b,\ 0)$，$\overrightarrow{OC}$ が，条件 $|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{3}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{2}$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\dfrac{5}{6}$ を満たしているとする。ただし，$a$，$b$ は正の数とする。

(1)　$a$，$b$ の値を求めよ。

(2)　三角形 OAB の面積 $S$ を求めよ。

(3)　四面体 OABC の体積 $V$ を求めよ。

(解説)

(1)　$|\overrightarrow{OB}|=1$ から　　$a^2+b^2=1$　…… ①

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{3}$ から　　$a=\dfrac{1}{3}$　…… ②

①，② から　　$b^2=1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{8}{9}$　　$b>0$ であるから　　$b=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

(2)　$|\overrightarrow{OA}|=1$

(1) の結果から　　$\overrightarrow{OB}=\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3},\ 0\right)$

よって　　$S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

$\boxed{\text{別解}}$　$|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=1$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{3}$ であるから

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{1^2\cdot 1^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

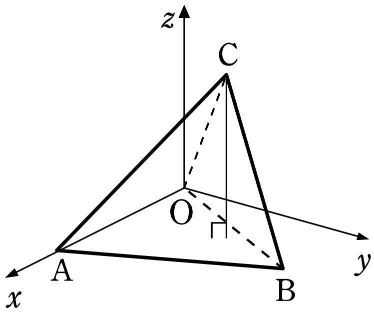
(3)　$\overrightarrow{OC}=(p,\ q,\ r)$ とおく。

$|\overrightarrow{OC}|=1$ から　　$p^2+q^2+r^2=1$　…… ③

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{2}$ から　　$p=\dfrac{1}{2}$　…… ④

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\dfrac{5}{6}$ から　　$\dfrac{1}{3}p+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}q=\dfrac{5}{6}$　…… ⑤

③，④，⑤ から　　$q=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$r=\pm\dfrac{1}{2}$




△OAB は $xy$ 平面上にあるから　　$V=\dfrac{1}{3}S|r|=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{18}$

$\boxed{7}$ 関数 $f(x)$ と $g(\theta)$ を

$$f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-t^2}\,dt\ \ (-1\leqq x\leqq 1)$$

$$g(\theta)=f(\cos\theta)-f(\sin\theta)\ \ (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

で定める。

(1)　導関数 $g'(\theta)$ を求めよ。

(2)　$g(\theta)$ を求めよ。

(3)　$y=g(\theta)$ のグラフをかけ。

解説

(1)　$f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-t^2}\,dt$ から　　$f'(x)=\sqrt{1-x^2}$

よって　　
$$\begin{aligned} g'(\theta)&=f'(\cos\theta)\cdot(\cos\theta)'-f'(\sin\theta)\cdot(\sin\theta)' \\ &=\sqrt{1-\cos^2\theta}\cdot(-\sin\theta)-\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta \\ &=-|\sin\theta|\sin\theta-|\cos\theta|\cos\theta \end{aligned}$$

ゆえに

$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき　　$g'(\theta)=-\sin^2\theta-\cos^2\theta=-1$

$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ のとき　　$g'(\theta)=-\sin^2\theta+\cos^2\theta=\cos 2\theta$

$\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{3}{2}\pi$ のとき　　$g'(\theta)=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\dfrac{3}{2}\pi\leqq\theta<2\pi$ のとき　$g'(\theta)=\sin^2\theta-\cos^2\theta=-\cos 2\theta$

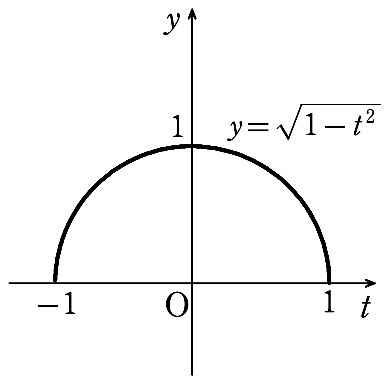
(2)　[1]　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$g'(\theta)=-1$ から　　$g(\theta)=-\theta+C_1$　($C_1$ は積分定数)　…… ①

ここで　　$g(0)=f(1)-f(0)$

$f(1)=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt$ であり，$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt$ は

半径 1 の半円の面積を表すから　　$f(1)=\dfrac{\pi}{2}$




また，$f(0)=\int_{-1}^{0}\sqrt{1-t^2}\,dt$ であり，

$\int_{-1}^{0}\sqrt{1-t^2}\,dt$ は半径 1 の四分円の面積を表すから

$$f(0)=\frac{\pi}{4}$$

ゆえに　　$g(0)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$

① より　$g(0)=C_1$　ゆえに　$C_1=\dfrac{\pi}{4}$

したがって　$g(\theta)=-\theta+\dfrac{\pi}{4}$

[2]　$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ のとき

$g'(\theta)=\cos 2\theta$ から　$g(\theta)=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta+C_2$ （$C_2$ は積分定数）　…… ②

ここで　$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f(0)-f(1)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{2}=-\dfrac{\pi}{4}$

② より　$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=C_2$　ゆえに　$C_2=-\dfrac{\pi}{4}$

したがって　$g(\theta)=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta-\dfrac{\pi}{4}$

[3]　$\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{3}{2}\pi$ のとき

$g'(\theta)=1$ から　$g(\theta)=\theta+C_3$ （$C_3$ は積分定数）　…… ③

ここで　$g(\pi)=f(-1)-f(0)$

$$f(-1)=\int_{-1}^{-1}\sqrt{1-t^2}\,dt=0$$

であるから　$g(\pi)=0-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{4}$

③ より　$g(\pi)=\pi+C_3$　$\pi+C_3=-\dfrac{\pi}{4}$ から　$C_3=-\dfrac{5}{4}\pi$

したがって　$g(\theta)=\theta-\dfrac{5}{4}\pi$

[4]　$\dfrac{3}{2}\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ のとき

$g'(\theta)=-\cos 2\theta$ から　$g(\theta)=-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta+C_4$ （$C_4$ は積分定数）　…… ④

ここで　$g\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=f(0)-f(-1)=\dfrac{\pi}{4}-0=\dfrac{\pi}{4}$

④ より　$g\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=C_4$　ゆえに　$C_4=\dfrac{\pi}{4}$

したがって　$g(\theta)=-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta+\dfrac{\pi}{4}$

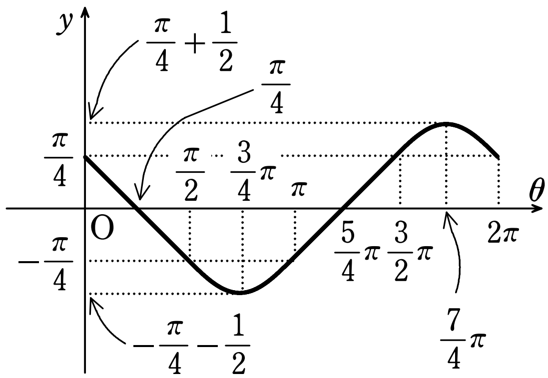
[1]～[4] から　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$g(\theta)=-\theta+\dfrac{\pi}{4}$

$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ のとき　$g(\theta)=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta-\dfrac{\pi}{4}$

$$\pi \leqq \theta \leqq \frac{3}{2}\pi \text{ のとき} \quad g(\theta)=\theta-\frac{5}{4}\pi$$

$$\frac{3}{2}\pi \leqq \theta \leqq 2\pi \text{ のとき} \quad g(\theta)=-\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{\pi}{4}$$

(3)　(2) から $y=g(\theta)$ のグラフは，右の図のようになる。




$\boxed{8}$ 行列 $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ に対して，座標空間の点 $\mathrm{P}_n$ の座標 $(a_n,\ b_n,\ c_n)$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を，$(a_1,\ b_1,\ c_1)=(1,\ 0,\ 0)$，$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$，

$c_{n+1}=c_n+\sqrt{a_nb_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定める。

(1)　$A^3$ を求めよ。

(2)　点 $\mathrm{P}_2$，$\mathrm{P}_3$，$\mathrm{P}_4$ の座標を求めよ。

(3)　点 $\mathrm{P}_n$ の座標を求めよ。

解説

(1)　$A^2=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(2)　$\begin{pmatrix}a_2\\ b_2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ から　　$a_2=0$，$b_2=\frac{1}{2}$

また　　$c_2=c_1+\sqrt{a_1b_1}=0$　　　　よって　　$\mathrm{P}_2\left(0,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$

$\begin{pmatrix}a_3\\ b_3\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_2\\ b_2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ から　　$a_3=b_3=-\frac{1}{4}$

また　　$c_3=c_2+\sqrt{a_2b_2}=0$　　　　よって　　$\mathrm{P}_3\left(-\frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ 0\right)$

$$\begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ から　　$a_4 = \frac{1}{8}$，$b_4 = 0$

また　　$c_4 = c_3 + \sqrt{a_3 b_3} = \frac{1}{4}$　　　　よって　　$\mathrm{P}_4\left(\frac{1}{8},\ 0,\ \frac{1}{4}\right)$

(3) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ を繰り返し用いて

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots\cdots = A^{n-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

ただし，$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) より，$A^3 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるから，$k$ を 0 以上の整数とすると

$$A^{3k} = (A^3)^k = \frac{1}{8^k}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって，[1]　$n = 3k+1$ のとき

$$\begin{pmatrix} a_{3k+1} \\ b_{3k+1} \end{pmatrix} = A^{3k}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8^k}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8^k}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[2]　$n = 3k+2$ のとき

$$\begin{pmatrix} a_{3k+2} \\ b_{3k+2} \end{pmatrix} = A^{3k+1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = A^{3k}A\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8^k}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{8^k}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

[3]　$n = 3k+3$ のとき

$$\begin{pmatrix} a_{3k+3} \\ b_{3k+3} \end{pmatrix} = A^{3k+2}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = A^{3k}A^2\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8^k}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4\cdot 8^k}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

したがって　$\sqrt{a_{3k+1}b_{3k+1}} = 0$，$\sqrt{a_{3k+2}b_{3k+2}} = 0$，$\sqrt{a_{3k+3}b_{3k+3}} = \frac{1}{4\cdot 8^k}$

$n \geqq 2$ のとき　$c_n = c_1 + \sum_{l=1}^{n-1}\sqrt{a_l b_l} = \sum_{l=1}^{n-1}\sqrt{a_l b_l}$ であるから，$k \geqq 1$ のとき

$$c_{3k+1} = \sum_{l=1}^{3k}\sqrt{a_l b_l} = \sum_{m=1}^{k}\left(\sqrt{a_{3m-2}b_{3m-2}} + \sqrt{a_{3m-1}b_{3m-1}} + \sqrt{a_{3m}b_{3m}}\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{4\cdot 8^{m-1}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^k}{1-\frac{1}{8}} = \frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^k\right\}$$

これは，$k=0$ のときも成り立つ。

$$c_{3k+2}=c_{3k+1}+\sqrt{a_{3k+1}b_{3k+1}}=c_{3k+1}=\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^k\right\}$$

$$c_{3k+3}=c_{3k+2}+\sqrt{a_{3k+2}b_{3k+2}}=c_{3k+2}=\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^k\right\}$$

$n=3k+1$ のとき　　$8^k=2^{3k}=2^{n-1}$

$n=3k+2$ のとき　　$8^k=2^{3k}=2^{n-2}$

$n=3k+3$ のとき　　$8^k=2^{3k}=2^{n-3}$

したがって，$k$ を $0$ 以上の整数とすると

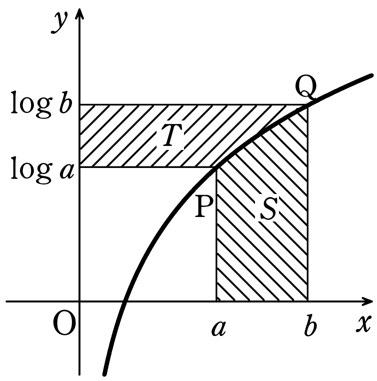
$n=3k+1$ のとき　　$\mathrm{P}_n\left(\frac{1}{2^{n-1}},\ 0,\ \frac{2}{7}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\right)$

$n=3k+2$ のとき　　$\mathrm{P}_n\left(0,\ \frac{1}{2^{n-1}},\ \frac{2}{7}\left(1-\frac{1}{2^{n-2}}\right)\right)$

$n=3k+3$ のとき　　$\mathrm{P}_n\left(-\frac{1}{2^{n-1}},\ -\frac{1}{2^{n-1}},\ \frac{2}{7}\left(1-\frac{1}{2^{n-3}}\right)\right)$

9　曲線 $C: y=\log x$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ \log a)$，点 $\mathrm{Q}(b,\ \log b)$ $(1<a<b)$ をとる。点 P，Q から $x$ 軸に下ろした 2 本の垂線と $x$ 軸および曲線 $C$ で囲まれた部分の面積を $S$ とする。点 P，Q から $y$ 軸に下ろした 2 本の垂線と $y$ 軸および曲線 $C$ で囲まれた部分の面積を $T$ とする。このとき，$S=T$ となるように $b$ がとれる $a$ の値の範囲を求めよ。

解説




$$S=\int_a^b \log x\,dx=\Big[x\log x-x\Big]_a^b$$

$$=b\log b-a\log a-(b-a)$$

$y=\log x$ から　　$x=e^y$

$$T=\int_{\log a}^{\log b} e^y dy=\Big[e^y\Big]_{\log a}^{\log b}=b-a$$

$S=T$ となるとき

$$b\log b-a\log a-(b-a)=b-a$$

よって　　$a\log a-2a=b\log b-2b$

したがって，$f(x)=x\log x-2x$ $(x>1)$ とおくと，

$$f(a)=f(b),\ 1<a<b$$

を満たす $b$ が存在するような $a$ の値の範囲が求めるものである。

$f'(x)=\log x+1-2=\log x-1$

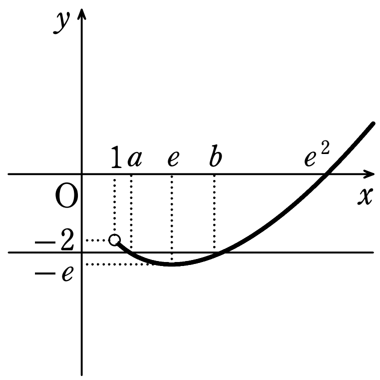
$x>1$ において，$f'(x)=0$ とすると　　$x=e$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

| $x$ | $1$ | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $-e$ | $\nearrow$ |

また　$\displaystyle\lim_{x\to1+0} f(x)=-2$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。




したがって，求める $a$ の値の範囲は

$$1<a<e$$