金沢大学入試問題2000

$\boxed{1}$［2000 金沢大］

正の定数 a $(a \neq 1)$ に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=a^{2x}+a^{-2x}-2(a+a^{-1})(a^x+a^{-x})+2(a+a^{-1})^2$$

とする．

(1) $a^x+a^{-x}=t$ とおくとき，t の最小値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．

(2) $f(x)$ の最小値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．

(1) $a^x>0$，$a^{-x}>0$ であるから (相加平均)$\geqq$(相乗平均) により

$a^x+a^{-x} \geqq 2\sqrt{a^x \cdot a^{-x}}=2$ である．

等号成立は，$a^x=a^{-x}$ のとき，すなわち $a^{2x}=1$ と $a>0$，$a \neq 1$ から $x=0$ のときである．

よって，t は $x=0$ のとき最小値 2 をとる．

(2) $a^{2x}+a^{-2x}=(a^x+a^{-x})^2-2\cdot a^x\cdot a^{-x}=(a^x+a^{-x})^2-2$

ゆえに $a^{2x}+a^{-2x}-2(a+a^{-1})(a^x+a^{-x})+2(a+a^{-1})^2$

$=(t^2-2)-2(a+a^{-1})t+2(a+a^{-1})^2$

$=\{t-(a+a^{-1})\}^2+(a+a^{-1})^2-2$

$=\{t-(a+a^{-1})\}^2+a^2+a^{-2}$

$g(t)=\{t-(a+a^{-1})\}^2+a^2+a^{-2}$ とおくと，$g(t)$ は $a+a^{-1} \geqq 2$ で，かつ $t \geqq 2$ であるから，$t=a+a^{-1}$ のとき最小値 a^2+a^{-2} をとる．

ここで $a^x+a^{-x}=a+a^{-1}$ とすると $a^{2x}-(a+a^{-1})a^x+1=0$ から

$(a^x-a)(a^x-a^{-1})=0$　　ゆえに　$x=\pm 1$

よって，$f(x)$ は，$x=\pm 1$ のとき，最小値 a^2+a^{-2} をとる．

$\boxed{2}$［2000 金沢大］

座標平面上で，原点 O を基準とする点 P の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が $\vec{p}$ であるとき，点 P を $\mathrm{P}(\vec{p})$ で表す．次の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{A}(\vec{a})$ を原点 O と異なる点とする．

（ア） 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，ベクトル $\vec{a}$ に垂直な直線上の任意の点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とするとき，$\vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}|^2$ が成り立つことを示せ．

（イ） ベクトル方程式 $|\vec{p}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}=0$ で表される図形を図示せよ．

(2) ベクトル $\vec{b}=(1,\ 1)$ に対して，不等式 $|\vec{p}-\vec{b}| \leqq |\vec{p}+3\vec{b}| \leqq 3|\vec{p}-\vec{b}|$ を満たす点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ 全体が表す領域を図示せよ．

(1) （ア） $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \vec{a}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{a}=0$

よって　$(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{a}=0$

ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}|^2$

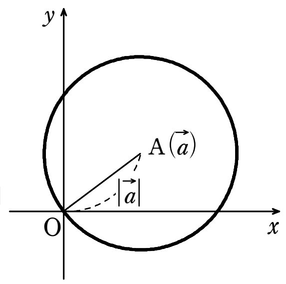
（イ） $|\vec{p}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}=0$ の両辺に $|\vec{a}|^2$ を加えると

$|\vec{p}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}+|\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2$

ゆえに　$|\vec{p}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2$

よって　$|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{a}|$

これは，$\mathrm{A}(\vec{a})$ を中心とする半径 $|\vec{a}|$ の円を表す．［図］



(2) $|\vec{p}-\vec{b}| \leqq |\vec{p}+3\vec{b}|$ の両辺を平方して整理すると

$\vec{b}\cdot\vec{p}+|\vec{b}|^2 \geqq 0$ …… ①

$\vec{p}=(x,\ y)$ とおくと，① から　$x+y+2 \geqq 0$

これは直線 $x+y+2=0$ の上側 (境界線を含む) を表す．

次に $|\vec{p}+3\vec{b}| \leqq 3|\vec{p}-\vec{b}|$ の両辺を平方して整理すると

$|\vec{p}|^2-3\vec{b}\cdot\vec{p} \geqq 0$

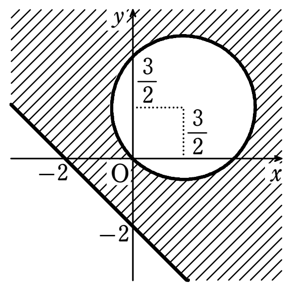
よって　$\left|\vec{p}-\dfrac{3}{2}\vec{b}\right|^2 \geqq \left|\dfrac{3}{2}\vec{b}\right|^2$

ゆえに　$\left|\vec{p}-\dfrac{3}{2}\vec{b}\right| \geqq \left|\dfrac{3}{2}\vec{b}\right|$

これは，点 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ の円の外部およびその周上を表す．

以上により，求める領域は図の斜線部分になる．

ただし，境界線を含む．



$\boxed{3}$［2000 金沢大］

定数 k に対して，関数 $f(t)$ と $g(t)$ をそれぞれ

$f(t)=3^{k+t}+3^{k-t}$，$g(t)=3^{k+t}-3^{k-t}$

と定める．すべての実数 t に対して，$f(2t)=\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2$ が成り立つとき，次の問いに答えよ．

(1) 定数 k を求めよ．また，$\{f(t)\}^2-\{g(t)\}^2$ を求めよ．

(2) 媒介変数 t で表された曲線 C : $x=2f(t)$，$y=g(t)-1$ を x と y の方程式で表し，C を座標平面上に図示せよ．

(3) (2) の曲線 C 上の点 P における接線が原点 O を通るとき，接点 P の座標を求めよ．

(1) $f(2t)=3^k(3^{2t}+3^{-2t})$，

$\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2=(3^{k+t}+3^{k-t})^2+(3^{k+t}-3^{k-t})^2=2\cdot 3^{2k}(3^{2t}+3^{-2t})$

ゆえに，$f(2t)=\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2$ が常に成り立つことから　$3^k=2\cdot 3^{2k}$

よって　$3^k=\dfrac{1}{2}$　　したがって　$k=-\log_3 2$

このとき　$\{f(t)\}^2-\{g(t)\}^2=(3^{k+t}+3^{k-t})^2-(3^{k+t}-3^{k-t})^2$

$=4\cdot 3^{k+t}\cdot 3^{k-t}$

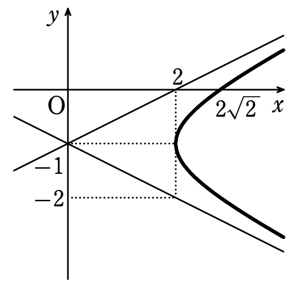
$=4\cdot 3^{2k}=4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=1$

(2) $f(t)=\dfrac{x}{2}$，$g(t)=y+1$ を $\{f(t)\}^2-\{g(t)\}^2=1$ に代入して

$\dfrac{x^2}{4}-(y+1)^2=1$ …… ①

ここで，$x=2f(t)>0$ であるから，

C は，双曲線 ① の $x>0$ の部分．［図］



(3) 接線の方程式を $y=ax$ とおいて ① に代入して

$\dfrac{x^2}{4}-(ax+1)^2=1$

ゆえに　$\left(a^2-\dfrac{1}{4}\right)x^2+2ax+2=0$

この 2 次方程式の判別式を D とおくと

$\dfrac{D}{4}=a^2-2\left(a^2-\dfrac{1}{4}\right)=0$ から　$a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

このときの重解は正であるから　$x=2\sqrt{2}$

よって　$a=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　このとき　$y=ax=-2$

したがって　$\mathrm{P}(2\sqrt{2},\ -2)$

金沢大学入試問題2000

$\boxed{4}$ ［2000 金沢大］

実数 $x \fallingdotseq 0$ に対して，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = x,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

によって定義する．次の問いに答えよ．

(1) $x \fallingdotseq -1$ のとき，$b_n = \dfrac{a_n - 1}{a_n + 1}$ とおく．b_{n+1} を b_n で表せ．また，b_n を x の式で表せ．

(2) 各 x $(\fallingdotseq 0)$ に対して，$\{a_n\}$ の極限値を求めよ．

(1) $$b_{n+1} = \frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+1} = \frac{\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) - 1}{\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) + 1} = \frac{{a_n}^2 - 2a_n + 1}{{a_n}^2 + 2a_n + 1} = \frac{(a_n - 1)^2}{(a_n+1)^2} = {b_n}^2$$

よって $$b_n = {b_{n-1}}^2 = {b_{n-2}}^4 = \cdots\cdots = {b_1}^{2^{n-1}} = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2^{n-1}}$$

(2) $b_n = \dfrac{a_n - 1}{a_n + 1}$ から $\quad a_n = \dfrac{1+b_n}{1-b_n}$

[1] $x > 0$ のとき

$|x+1| > |x-1|$ であるから $\quad b_n \longrightarrow 0\ (n \longrightarrow \infty)$

よって $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+b_n}{1-b_n} = 1$$

[2] $x < -1,\ -1 < x < 0$ のとき

$|x+1| < |x-1|$ であるから $\quad b_n \longrightarrow \infty\ (n \longrightarrow \infty)$

よって $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{b_n}+1}{\frac{1}{b_n}-1} = -1$$

[3] $x = -1$ のとき $\quad a_n = -1 \qquad$ よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -1$

以上から $\quad x > 0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1$，$\quad x < 0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -1$

$\boxed{5}$ ［2000 金沢大］

次を示せ．

(1) $\log(n+1) < 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{n} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \int_1^{n+1} \left|\frac{\sin \pi x}{x}\right| dx = \int_0^1 \sin \pi y\, dy = \frac{2}{\pi}$

(1) k を自然数として $k \leqq x \leqq k+1$ のとき

$\dfrac{1}{x} \leqq \dfrac{1}{k}$ から $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx = \frac{1}{k}$

よって $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n}$

一方 $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \Big[\log x\Big]_1^{n+1} = \log(n+1)$

ゆえに $\quad \log(n+1) < 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{n}$

(2) (1) と同様に $k \leqq x \leqq k+1$ のとき $\dfrac{1}{k+1} \leqq \dfrac{1}{x}$ から $\displaystyle\frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$

よって $$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n+1} < \int_1^{n+1} \frac{dx}{x}$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n+1} < \log(n+1)$$

よって，(1) の結果と合わせて $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} - 1 < \log(n+1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

ゆえに $$\frac{\log(n+1)}{\log n} < \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \frac{\log(n+1)}{\log n} + \frac{1 - \frac{1}{n+1}}{\log n} \cdots\cdots ①$$

$n \longrightarrow \infty$ のとき $$\frac{\log(n+1)}{\log n} = \frac{\log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}$$
$$= 1 + \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n} \longrightarrow 1,\quad \frac{1 - \frac{1}{n+1}}{\log n} \longrightarrow 0$$

から，①より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1$

(3) k を自然数，$x = y + k$ とすると

$$\int_k^{k+1} \left|\frac{\sin \pi x}{x}\right| dx = \int_0^1 \frac{|\sin \pi (y+k)|}{y+k} dy$$
$$= \int_0^1 \frac{\sin \pi y}{y+k} dy$$

$$\int_1^{n+1} \left|\frac{\sin \pi x}{x}\right| dx = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \left|\frac{\sin \pi x}{x}\right| dx$$
$$= \int_0^1 \left(\sin \pi y \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{y+k}\right) dy$$

$0 \leqq y \leqq 1$ のとき $\quad \dfrac{1}{k+1} \leqq \dfrac{1}{y+k} \leqq \dfrac{1}{k}$

よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{y+k} \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$\sin \pi y \geqq 0$ から $\displaystyle\sin \pi y \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqq \sin \pi y \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{y+k} \leqq \sin \pi y \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

よって

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \int_0^1 \sin \pi y\, dy < \int_0^1 \left(\sin \pi y \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{y+k}\right) dy < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \int_0^1 \sin \pi y\, dy$$

$$\left(\frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\right) \int_0^1 \sin \pi y\, dy < \frac{1}{\log n} \int_1^{n+1} \left|\frac{\sin \pi x}{x}\right| dx$$
$$< \left(\frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \int_0^1 \sin \pi y\, dy \cdots\cdots ②$$

(2) により $\displaystyle\frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \longrightarrow 1\ (n \longrightarrow \infty)$,

また $\displaystyle\frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{\log n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} - 1\right) \longrightarrow 1\ (n \longrightarrow \infty)$ から

② で $n \longrightarrow \infty$ とすることにより

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \int_1^{n+1} \left|\frac{\sin \pi x}{x}\right| dx = \int_0^1 \sin \pi y\, dy$$

$$\int_0^1 \sin \pi y\, dy = \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi y\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

これで与式が証明された．