金沢大学入試問題2001

$\boxed{1}$ [2001 金沢大]

平面上に，同一直線上にない 3 定点 O，A，B があり，線分 OA，OB の長さはそれぞれ 9，4 である．動点 P，Q は同時に O を出発し，P は線分 OA 上を秒速 3 で，Q は線分 OB 上を秒速 2 でそれぞれ往復運動を繰り返しているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 出発してから初めて P，Q が O で出会うのは何秒後か．

(2) 出発してから 5 秒後の PQ の長さは 4 であった．∠AOB の余弦と正弦の値を求めよ．

(3) 出発してから t 秒後の OP，OQ の長さをそれぞれ x，y とする．点 $(x,\ y)$ の軌跡を $0 \leqq t \leqq 6$ の範囲で xy 平面上に図示せよ．

(1) 点 P は 6 秒ごとに O に戻り，点 Q は 4 秒ごとに O に戻る．

よって，出発後初めて P，Q が出会うのは，4 と 6 の最小公倍数をとって，12 秒後．

(2) 5 秒後は $\mathrm{OP}=3$，$\mathrm{OQ}=2$

$\angle \mathrm{AOB}=\theta$ とおくと，余弦定理により

$$4^2=3^2+2^2-2\cdot 3\cdot 2\cos\theta$$

すなわち　$\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$

$\sin\theta>0$ であるから　$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

(3) [1] $0 \leqq t \leqq 2$ のとき

$x=3t$，$y=2t$ であるから　$y=\dfrac{2}{3}x\ (0 \leqq x \leqq 6)$

[2] $2<t \leqq 3$ のとき

$x=3t$，$y=4-2(t-2)$ であるから

$y=8-\dfrac{2}{3}x\ (6<x \leqq 9)$

[3] $3<t \leqq 4$ のとき

$x=9-3(t-3)$，$y=4-2(t-2)$ であるから

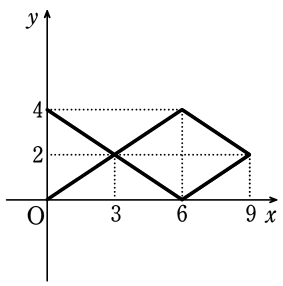
$y=\dfrac{2}{3}x-4\ (6 \leqq x<9)$

[4] $4<t \leqq 6$ のとき

$x=9-3(t-3)$，$y=2(t-4)$ であるから

$y=-\dfrac{2}{3}x+4\ (0 \leqq x<6)$

以上により，求める軌跡は図のようになる．



$\boxed{2}$ [2001 金沢大]

2 つの放物線 $y=-x^2+1$ と $y=qx^2+px+2$ が $0<x<1$ の範囲で共有点をもち，かつその点で共通の接線をもつとする．

(1) 上の条件を満たすような点 $(p,\ q)$ を pq 平面上に図示せよ．

(2) 共有点の x 座標を $\alpha\ (0<\alpha<1)$ とし，

$$f(x)=\begin{cases} qx^2+px+2 & (0 \leqq x<\alpha) \\ -x^2+1 & (\alpha \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$

とおく．このとき積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を p で表せ．

(1) $g(x)=-x^2+1$，$h(x)=qx^2+px+2$ とおく．また，共有点の x 座標を $\alpha\ (0<\alpha<1)$ とする．$x=\alpha$ で共通の接線をもつから

$$g(\alpha)=h(\alpha),\quad g'(\alpha)=h'(\alpha)$$

よって　$-\alpha^2+1=q\alpha^2+p\alpha+2$　すなわち　$(q+1)\alpha^2+p\alpha+1=0$ …… ①

$-2\alpha=2q\alpha+p$　すなわち　$2(q+1)\alpha=-p$ …… ②

$q=-1$ とすると，② から　$p=0$　　これは ① を満たさない．よって　$q \fallingdotseq -1$

このとき ② から　$\alpha=-\dfrac{p}{2(q+1)}$ …… ②′，

① から　$\alpha=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4(q+1)}}{2(q+1)}$ …… ①′

①′，②′ から　$p^2-4(q+1)=0$ …… ③

$q \fallingdotseq -1$ であるから　$p \fallingdotseq 0$

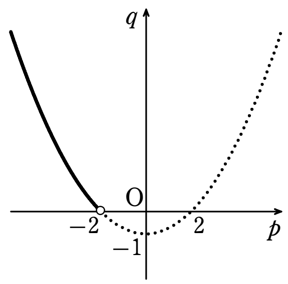
よって，②′，③ から　$\alpha=-\dfrac{2}{p}$

$0<\alpha<1$ であるから　$0<-\dfrac{2}{p}<1$

すなわち　$p<-2$ …… ④

よって，求める $(p,\ q)$ は ③，④ を満たす．逆に，③，④ を満たせば，2 つの放物線は $0<x<1$ で共有点をもち，その点で接線を共有する．

ゆえに，③，④ を図示すると右図のようになる．



(2)
$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^\alpha (qx^2+px+2)\,dx+\int_\alpha^1 (-x^2+1)\,dx \\
&= \left[\frac{q}{3}x^3+\frac{p}{2}x^2+2x\right]_0^\alpha+\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_\alpha^1 \\
&= \left(\frac{1}{3}q\alpha^3+\frac{1}{2}p\alpha^2+2\alpha\right)-\frac{1}{3}(1-\alpha^3)+(1-\alpha) \\
&= \frac{1}{3}(q+1)\alpha^3+\frac{1}{2}p\alpha^2+\alpha+\frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{p^2}{4}\left(-\frac{2}{p}\right)^3+\frac{1}{2}p\left(-\frac{2}{p}\right)^2+\left(-\frac{2}{p}\right)+\frac{2}{3} \\
&= \left(-\frac{2}{3}+2-2\right)\frac{1}{p}+\frac{2}{3} \\
&= \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{p}\right)
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ [2001 金沢大]

整式 $f(x)$ は関係式 $\displaystyle\int_0^x f(x)\,dx=x^3-3x^2-9x+2\int_x^0 f(x)\,dx$ を満たしている．また，$r \geqq 0$ に対し，$|x| \leqq r$ における $|f(x)|$ の最大値を $F(r)$ とする．

(1) $f(x)$ を求め，$y=|f(x)|$ のグラフをかけ．

(2) $F(r)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_0^2 F(r)\,dr$ を求めよ．

(1) 与えられた関係式から

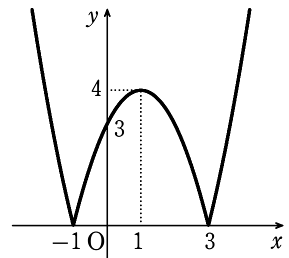
$$3\int_0^x f(x)\,dx=x^3-3x^2-9x$$

両辺を x で微分すると　$3f(x)=3x^2-6x-9$

すなわち　$f(x)=x^2-2x-3$

よって　$f(x)=(x-1)^2-4$

ゆえに　$y=|f(x)|$ のグラフは右図のようになる．



(2) 方程式 $f(x)=4$ を解くと　$x=1\pm2\sqrt{2}$

よって，(1) のグラフから

$$F(r)=\begin{cases} -f(r)=-r^2+2r+3 & (0 \leqq r<1) \\ 4 & (1 \leqq r<2\sqrt{2}-1) \\ f(-r)=r^2+2r-3 & (2\sqrt{2}-1 \leqq r) \end{cases}$$

(3)
$$\begin{aligned}
\int_0^2 F(r)\,dr &= \int_0^1 (-r^2+2r+3)\,dr+\int_1^{2\sqrt{2}-1} 4\,dr+\int_{2\sqrt{2}-1}^2 (r^2+2r-3)\,dr \\
&= \left[-\frac{r^3}{3}+r^2+3r\right]_0^1+\Big[4r\Big]_1^{2\sqrt{2}-1}+\left[\frac{(r+1)^3}{3}-4r\right]_{2\sqrt{2}-1}^2 \\
&= \left(-\frac{1}{3}+1+3\right)+4(2\sqrt{2}-1-1)+\frac{3^3-(2\sqrt{2})^3}{3}-4\{2-(2\sqrt{2}-1)\} \\
&= \frac{11}{3}+8\sqrt{2}-8+9-\frac{16\sqrt{2}}{3}-8+8\sqrt{2}-4 \\
&= \frac{32\sqrt{2}-22}{3}
\end{aligned}$$

金沢大学入試問題2001

$\boxed{4}$［2001　金沢大］

方程式 $z^6+1=0$ を満たす 6 個の複素数を，偏角 θ $(0^\circ \leqq \theta < 360^\circ)$ の小さい順に α_1，α_2，……，α_6 とする．

(1)　α_1，α_2，……，α_6 を求め，複素数平面上に図示せよ．

(2)　$\alpha_k \alpha_l = \dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ となる $(k,\ l)$ を求めよ．

(3)　複素数 $z \fallingdotseq 0$ に対し，サイコロを振って出た目が k ならば α_k を掛けるという操作を行う．こうして得られた複素数に対し，再びサイコロを振り同じ操作を行って得られる複素数を w とする．複素数 0，z，w の表す 3 点が正三角形をなす確率を求めよ．

(1)　$z^6+1=0$ から　$z^6=-1$ …… ①

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0)$ とおくと　$z^6=r^6(\cos 6\theta+i\sin 6\theta)$ …… ②

①，② から　$r^6(\cos 6\theta+i\sin 6\theta)=\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ$

ゆえに　$r=1$，$\theta=\dfrac{180^\circ+360^\circ\times n}{6}=30^\circ+60^\circ\times n$ （n は整数）

よって　$\alpha_1=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$

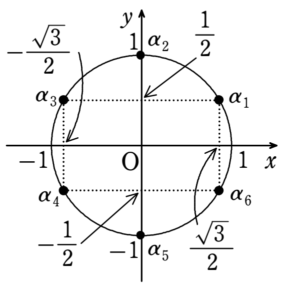
$\alpha_2=\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ=i$

$\alpha_3=\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ=\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$

$\alpha_4=\cos 210^\circ+i\sin 210^\circ=\dfrac{-\sqrt{3}-i}{2}$

$\alpha_5=\cos 270^\circ+i\sin 270^\circ=-i$

$\alpha_6=\cos 330^\circ+i\sin 330^\circ=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$



ゆえに，図は右のようになる．

(2)　$\arg(\alpha_k\alpha_l)=30^\circ+60^\circ\times(k-1)+30^\circ+60^\circ\times(l-1)$

$=60^\circ\times(k+l-1)$ …… ①

$\arg\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}=60^\circ+360^\circ\times m=60^\circ\times(6m+1)$ …… ② （m は整数）

① において，$1\leqq k\leqq 6$，$1\leqq l\leqq 6$ であるから　$1\leqq k+l-1\leqq 11$

また，① と ② の偏角が一致するから　$1\leqq 6m+1\leqq 11$　　ゆえに　$m=0,\ 1$

よって　$k+l-1=1,\ 7$　すなわち　$k+l=2,\ 8$

ゆえに　$(k,\ l)=(1,\ 1),\ (2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4),\ (5,\ 3),\ (6,\ 2)$

(3)　$w=\alpha_k\alpha_l z$　　よって，正三角形をなすのは

[1]　$\alpha_k\alpha_l=\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$

[2]　$\alpha_k\alpha_l=\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ=\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$

の場合である．

[1] のとき　(2) から，6 通り．

[2] のとき　$\arg(\alpha_k\alpha_l)=60^\circ\times(k+l-1)$

$\arg\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}=300^\circ+360^\circ\times m=60^\circ\times(6m+5)$

よって　$1\leqq 6m+5\leqq 11$　　ゆえに　$m=0,\ 1$

よって　$k+l-1=5,\ 11$　すなわち　$k+l=6,\ 12$

ゆえに　$(k,\ l)=(1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2),\ (5,\ 1),\ (6,\ 6)$

よって　6 通り．

[1]，[2] から，求める確率は　$\dfrac{6+6}{6^2}=\dfrac{1}{3}$

$\boxed{5}$［2001　金沢大］

2 次関数 $y=f(x)$ は 2 点 $(0,\ 0)$，$(p,\ 0)$ を通り $(p>0)$，曲線 $y=e^x$ 上に頂点をもつとする．

(1)　$f(x)$ の x^2 の係数を p で表せ．

(2)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた図形を F_1 とする．また，曲線 $y=e^x$ と x 軸，および 2 直線 $x=0$，$x=p$ で囲まれた図形を F_2 とする．更に，F_1，F_2 を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とする．このとき，V_1，V_2 の値を p を用いて表せ．

(3)　$\displaystyle\lim_{p\to+0}\frac{V_1}{V_2}$ を求めよ．

(1)　$f(x)$ の x^2 の係数を a とおくと　$f(x)=ax(x-p)$

このとき　$y=f(x)$ のグラフの頂点は　$\left(\dfrac{p}{2},\ -\dfrac{ap^2}{4}\right)$

これが　$y=e^x$ 上にあることから　$-\dfrac{ap^2}{4}=e^{\frac{p}{2}}$

よって　$a=-\dfrac{4}{p^2}e^{\frac{p}{2}}$

(2)　$V_1=\pi\displaystyle\int_0^p a^2x^2(x-p)^2dx$

$=\pi a^2\displaystyle\int_0^p(x^4-2px^3+p^2x^2)dx$

$=\dfrac{16\pi}{p^4}e^p\left(\dfrac{1}{5}p^5-\dfrac{1}{2}p^5+\dfrac{1}{3}p^5\right)=\dfrac{8}{15}\pi pe^p$

$V_2=\pi\displaystyle\int_0^p e^{2x}dx=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^p=\frac{\pi}{2}(e^{2p}-1)$

(3)　$\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\dfrac{8}{15}\pi pe^p}{\dfrac{\pi}{2}(e^{2p}-1)}=\dfrac{8}{15}\cdot e^p\cdot\dfrac{2p}{e^{2p}-1}$

ここで　$\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=\lim_{t\to0}\frac{e^t-e^0}{t-0}=e^0=1$ から

$\displaystyle\lim_{p\to0}\frac{2p}{e^{2p}-1}=1$　また　$\displaystyle\lim_{p\to0}e^p=1$

よって　$\displaystyle\lim_{p\to+0}\frac{V_1}{V_2}=\frac{8}{15}$

$\boxed{6}$ ［2001 金沢大］

行列 $A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) A^2, A^4 を求めよ.

(2) $A^3+2A^2+4A+8E$ を求めよ.

(3) $E+\dfrac{1}{2}A+\left(\dfrac{1}{2}A\right)^2+\cdots\cdots+\left(\dfrac{1}{2}A\right)^{2001}$ を求めよ.

(1) $A^2=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -5\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}=-4E$

$A^4=(A^2)^2=(-4E)^2=16E=\begin{pmatrix}16 & 0\\ 0 & 16\end{pmatrix}$

(2) $A^3=A^2A=-4A$ から

$A^3+2A^2+4A+8E=-4A-8E+4A+8E=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

(3) 2 次の零行列を O とする.

(2) から $E+\dfrac{1}{2}A+\dfrac{1}{4}A^2+\dfrac{1}{8}A^3=O$

すなわち $E+\dfrac{1}{2}A+\left(\dfrac{1}{2}A\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}A\right)^3=O$

よって，0 以上の整数 n について

$$\left(\frac{1}{2}A\right)^{4n}+\left(\frac{1}{2}A\right)^{4n+1}+\left(\frac{1}{2}A\right)^{4n+2}+\left(\frac{1}{2}A\right)^{4n+3}$$

$$=\left(\frac{1}{2}A\right)^{4n}\left\{E+\frac{1}{2}A+\left(\frac{1}{2}A\right)^2+\left(\frac{1}{2}A\right)^3\right\}=O$$

ゆえに

$$E+\frac{1}{2}A+\left(\frac{1}{2}A\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2}A\right)^{2001}$$

$$=\sum_{n=0}^{499}\left\{\left(\frac{1}{2}A\right)^{4n}+\left(\frac{1}{2}A\right)^{4n+1}+\left(\frac{1}{2}A\right)^{4n+2}+\left(\frac{1}{2}A\right)^{4n+3}\right\}+\left(\frac{1}{2}A\right)^{2000}+\left(\frac{1}{2}A\right)^{2001}$$

$$=\left(\frac{1}{16}A^4\right)^{500}\left(E+\frac{1}{2}A\right)$$

$$=E+\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & -5\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$