金沢大学入試問題2002

1 ［2002 金沢大］

(1)　$f(x)=x^3-6x^2-96x-80$ とする．$x\geqq 14$ ならば $f(x)>0$ となることを示せ．

(2)　自然数 a に対して，$b=\dfrac{9a^2+98a+80}{a^3+3a^2+2a}$ とおく．b も自然数となるような a と b の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

(1)　$f(x)=x^3-6x^2-96x-80$

$f'(x)=3x^2-12x-96=3(x+4)(x-8)$

$x\geqq 14$ のとき，常に $f'(x)>0$ であるから $f(x)$ は単調に増加．また　$f(14)=144$

よって，$x\geqq 14$ ならば　$f(x)\geqq f(14)=144>0$

(2)　b が自然数となるためには，$b\geqq 1$ から $\dfrac{9a^2+98a+80}{a^3+3a^2+2a}\geqq 1$ となることが必要．

よって　$9a^2+98a+80\geqq a^3+3a^2+2a$

すなわち　$a^3-6a^2-96a-80\leqq 0$

ゆえに，(1) から a は $1\leqq a\leqq 13$ を満たす自然数．

また　$b=\dfrac{6(a^2+16a+13)+(3a^2+2a+2)}{a(a+1)(a+2)}$ と表される．

$a(a+1)(a+2)$ は連続 3 整数の積であるから 6 の倍数．

よって，$3a^2+2a+2$ が 6 の倍数，すなわち 2 の倍数であり，かつ 3 の倍数であるとき，b は自然数となる．

[1]　$3a^2+2(a+1)$ が 2 の倍数になるとき

$3a^2$ が 2 の倍数，すなわち a が 2 の倍数のとき．

[2]　$3a^2+2(a+1)$ が 3 の倍数になるとき

$2(a+1)$ が 3 の倍数，すなわち $a=3k-1$ ($k=1,\ 2,\ \cdots\cdots$) のとき．

$1\leqq a\leqq 13$ で [1]，[2] を同時に満たす a の値は $a=2,\ 8$

よって　$a=2$ のとき　$b=\dfrac{6\cdot 49+18}{2\cdot 3\cdot 4}=13,$

$a=8$ のとき　$b=\dfrac{6\cdot 205+210}{8\cdot 9\cdot 10}=2$

したがって　$(a,\ b)=(2,\ 13),\ (8,\ 2)$

2 ［2002 金沢大］

関数 $f(x)=-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{1}{4}x+2|x|-\dfrac{15}{16}$ に対して

(1)　$f(x)\leqq 0$ を満たす x の値の範囲を求めよ．

(2)　関数 $f(x)$ の最大値を求めよ．

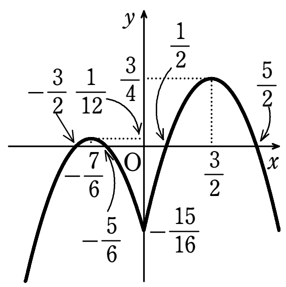
(3)　$a>0$ とするとき，$\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\,dx>0$ を満たす a の値の範囲を求めよ．

(1)　$x\geqq 0$ のとき

$$f(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}x+2x-\frac{15}{16}$$
$$=-\frac{3}{16}(2x-5)(2x-1)$$
$$=-\frac{3}{4}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$x<0$ のとき

$$f(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}x-2x-\frac{15}{16}$$
$$=-\frac{1}{16}(6x+5)(2x+3)$$
$$=-\frac{3}{4}\left(x+\frac{7}{6}\right)^2+\frac{1}{12}$$



$y=f(x)$ のグラフは図のようになるから，$f(x)\leqq 0$ を満たす x の値の範囲は

$x\leqq -\dfrac{3}{2},\ \ -\dfrac{5}{6}\leqq x\leqq \dfrac{1}{2},\ \ \dfrac{5}{2}\leqq x$

(2)　グラフから，$x=\dfrac{3}{2}$ のとき $f(x)$ は最大値 $\dfrac{3}{4}$ をとる．

(3)　$a>0$ であるから

$$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=\int_{-a}^{a}\left(-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}x+2|x|-\frac{15}{16}\right)dx$$
$$=\int_{-a}^{a}\left(-\frac{3}{4}x^2+2|x|-\frac{15}{16}\right)dx$$
$$=2\int_{0}^{a}\left(-\frac{3}{4}x^2+2x-\frac{15}{16}\right)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{4}x^3+x^2-\frac{15}{16}x\right]_0^a$$
$$=2\left(-\frac{1}{4}a^3+a^2-\frac{15}{16}a\right)$$
$$=-\frac{1}{8}a(2a-3)(2a-5)$$

よって，$a>0$，$\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\,dx>0$ を満たす a の値の範囲は

$a>0$，$-\dfrac{1}{8}(2a-3)(2a-5)>0$ から　$\dfrac{3}{2}<a<\dfrac{5}{2}$

3 ［2002 金沢大］

$f(z)=z^4+az^3+bz^2+cz+d$ を実数係数の 4 次多項式とする．

(1)　複素数 α が方程式 $f(z)=0$ の解ならば，α と共役な複素数 $\overline{\alpha}$ も解であることを示せ．

以下では，α は虚部が正で絶対値が 1 より大きい複素数とし，α，$\dfrac{1}{\alpha}$ がともに方程式 $f(z)=0$ の解になっているものとする．

(2)　方程式 $f(z)=0$ の α と異なる解のうち，虚部が正であるものを β とする．複素数平面において，点 α と点 β が直径の両端となる円を C とする．C の中心と半径を，α の絶対値 r と偏角 θ を用いて表せ．

(3)　原点 O から (2) の円 C へ接線を引き，接点の 1 つを w とする．w の絶対値を求めよ．

(1)　$f(\alpha)=\alpha^4+a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0$ であるから

$f(\overline{\alpha})=(\overline{\alpha})^4+a(\overline{\alpha})^3+b(\overline{\alpha})^2+c\overline{\alpha}+d=\overline{\alpha^4}+a\overline{\alpha^3}+b\overline{\alpha^2}+c\overline{\alpha}+d$

$=\overline{\alpha^4+a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d}=\overline{0}=0$

よって，α が $f(z)=0$ の解ならば $\overline{\alpha}$ も $f(z)=0$ の解である．

(2)　α は虚部が正で，$|\alpha|>1$ であるから，α，$\overline{\alpha}$，$\dfrac{1}{\alpha}$，$\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$ はすべて異なる．

(1) から，これらは $f(z)=0$ の解である．

また，$f(z)=0$ は 4 次方程式であるから，これら以外に解はない．

α の虚部が正であるから，他に虚部が正であるのは $\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$

このことと $\beta\neq\alpha$ から　$\beta=\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$

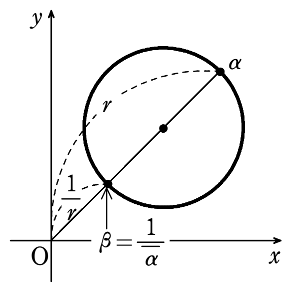
$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ であるから

$\beta=\dfrac{1}{r(\cos\theta-i\sin\theta)}=\dfrac{1}{r}(\cos\theta+i\sin\theta)$

$r>1$ であるから，円の半径は　$\dfrac{1}{2}\left(r-\dfrac{1}{r}\right)$

原点と中心の距離は　$\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{2}\left(r-\dfrac{1}{r}\right)=\dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{1}{r}\right)$

であるから，円の中心は点　$\dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{1}{r}\right)(\cos\theta+i\sin\theta)$



(3)　円 C の中心を C，w の表す点を W とすると

$$|w|=|\mathrm{OW}|=\sqrt{|\mathrm{OC}|^2-|\mathrm{CW}|^2}$$
$$=\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\right\}^2-\left\{\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\right\}^2}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1$$

金沢大学入試問題2002

$\boxed{4}$［2002 金沢大］

a を正の定数とし，xy 平面上の曲線 $y=a\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ を C とする．

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対して，点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ 0\right)$ から曲線 C に接線 l を引き，接点を P とする．

(1) l の方程式および P の座標を求めよ．

(2) 直線 $x=-1$ と直線 l および曲線 C で囲まれる部分の面積を S_1 とし，x 軸と直線 l および曲線 C で囲まれる部分の面積を S_2 とする．S_1，S_2 を求めよ．

(3) 直線 l と直線 $x=-1$ の交点を B とする．点 P が線分 AB の中点となるならば，$S_1=2S_2$ が成り立つことを示せ．

(1) $y=a\sqrt{1-x^2}$ から $x^2+\dfrac{y^2}{a^2}=1$

P の座標を $\left(t,\ a\sqrt{1-t^2}\right)$ とすると，接線 l の方程式は $tx+\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{a}y=1$

すなわち $y=\dfrac{-at}{\sqrt{1-t^2}}x+\dfrac{a}{\sqrt{1-t^2}}$ …… ①

l が $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ 0\right)$ を通るから，① より $0=\dfrac{-at}{\sqrt{1-t^2}}\cdot\dfrac{1}{\cos\theta}+\dfrac{a}{\sqrt{1-t^2}}$

$a>0$ であるから，整理して $t=\cos\theta$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから $\sqrt{1-t^2}=\sin\theta$

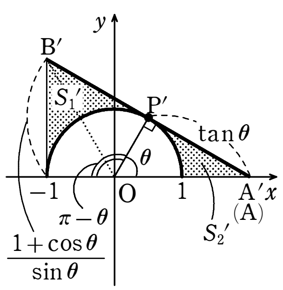
ゆえに，l の方程式は $y=\dfrac{-a\cos\theta}{\sin\theta}x+\dfrac{a}{\sin\theta}$

すなわち $y=\dfrac{-a}{\tan\theta}x+\dfrac{a}{\sin\theta}$

また，P の座標は $(\cos\theta,\ a\sin\theta)$

(2) 直線 $x=-1$ と直線 l の交点 B の座標は $\left(-1,\ a\cdot\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

y 軸方向に $\dfrac{1}{a}$ 倍すると，曲線 C は半径 1 の半円になる．このとき，A，B，P に対応する点を，それぞれ A′，B′，P′ とし，$S_1'=\dfrac{1}{a}S_1$，$S_2'=\dfrac{1}{a}S_2$ とすると，S_1'，S_2' は図の影の部分の面積になる．



$\mathrm{A}'\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ 0\right)$，$\mathrm{B}'\left(-1,\ \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)$，

$\mathrm{P}'(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\angle\mathrm{A}'\mathrm{OP}'=\theta$ であるから

$$S_1'=2\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)-\frac{1}{2}\cdot 1^2(\pi-\theta)$$

$$=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}$$

$$S_2'=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan\theta-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\theta=\frac{1}{2}(\tan\theta-\theta)$$

ゆえに $S_1=aS_1'=a\left(\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}+\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)$，$S_2=aS_2'=\dfrac{a}{2}(\tan\theta-\theta)$

(3) 点 P が線分 AB の中点であるから，点 P の x 座標を考えると

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(-1+\frac{1}{\cos\theta}\right)$$

整理して $2\cos^2\theta+\cos\theta-1=0$

ゆえに $(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)=0$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

よって $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

このとき

$$S_1=a\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)=a\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$S_2=\frac{a}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$$

したがって，$S_1=2S_2$ が成り立つ．

$\boxed{5}$［2002 金沢大］

すべての正の数 x，y に対して，不等式 $x(\log x-\log y)\geqq x-y$ が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つのは $x=y$ の場合に限ることを示せ．

$f(u)=\log u$ とおくと $f'(u)=\dfrac{1}{u}$

[1] $x>y>0$ のとき

平均値の定理から，$\dfrac{\log x-\log y}{x-y}=f'(c)$ を満たす c $(0<y<c<x)$ が存在する．

すなわち $\dfrac{\log x-\log y}{x-y}=\dfrac{1}{c}$

$\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{y}$ であるから $\dfrac{\log x-\log y}{x-y}>\dfrac{1}{x}$

$x-y>0$，$x>0$ であるから $x(\log x-\log y)>x-y$ が成り立つ．

[2] $y>x>0$ のとき

[1] と同様にして $\dfrac{\log x-\log y}{x-y}<\dfrac{1}{x}$

$x-y<0$，$x>0$ であるから $x(\log x-\log y)>x-y$ が成り立つ．

[3] $x=y>0$ のとき

$x(\log x-\log y)=x-y=0$ が成り立つ．

[1]～[3] から，すべての正の数 x，y に対して $x(\log x-\log y)\geqq x-y$ が成り立つ．

等号が成り立つのは，$x=y$ のときに限る．