金沢大学入試問題2003

$\boxed{1}$［2003 金沢大］

関数 $f(\theta)=\sin\theta+\cos\theta+2\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta$ $(0°\leqq\theta<360°)$ について

(1) $t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を t で表せ．また，t のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $f(\theta)=0$ を満たす θ の値をすべて求めよ．

(3) $f(\theta)=a$ を満たす θ がちょうど2個となるような定数 a の値の範囲を求めよ．

(1) $\sin\theta+\cos\theta=t$ から　$1+2\sin\theta\cos\theta=t^2$

ゆえに　$f(\theta)=t+\sqrt{2}(t^2-1)=\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}$

$t=\sqrt{2}\sin(\theta+45°)$，$45°\leqq\theta+45°<405°$ から　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}=0$ から　$(\sqrt{2}t-1)(t+\sqrt{2})=0$

ゆえに　$t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$-\sqrt{2}$

$t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　$\sin(\theta+45°)=\dfrac{1}{2}$

$45°\leqq\theta+45°<405°$ から　$\theta+45°=150°$，$390°$

よって　$\theta=105°$，$345°$

$t=-\sqrt{2}$ のとき　$\sin(\theta+45°)=-1$

$45°\leqq\theta+45°<405°$ から　$\theta+45°=270°$

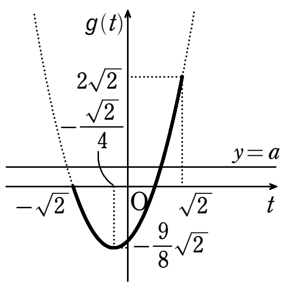
よって　$\theta=225°$

ゆえに　$\theta=105°$，$225°$，$345°$

(3) $f(\theta)=g(t)$ とおくと

$g(t)=\sqrt{2}\left(t+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2-\dfrac{9}{8}\sqrt{2}$

$(-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2})$



ここで，$t=\sqrt{2}\sin(\theta+45°)$ あるから，

$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$ のとき，$t=k$ となる θ は2つ存在し，$k=\pm\sqrt{2}$ のとき，$t=k$ となる θ は1つ存在する．

よって，右図から，条件を満たす a の値の範囲は

$a=-\dfrac{9}{8}\sqrt{2}$，$0<a<2\sqrt{2}$

$\boxed{2}$［2003 金沢大］

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=-4$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+3}n-13\cdot2^{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ により定められている．

(1) $b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくとき，b_n と b_{n+1} の満たす関係式を導き，$\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $a_n>a_{n+1}$ となるような n の値をすべて求めよ．

(3) a_n が最小となるような n の値をすべて求めよ．

(1) $a_{n+1}=2a_n+2^{n+3}n-13\cdot2^{n+1}$ の両辺を 2^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^n}+4n-13$

$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ であるから　$b_{n+1}=b_n+4n-13$　　すなわち　$b_{n+1}-b_n=4n-13$

$n\geqq2$ のとき　$b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(4k-13)=\dfrac{a_1}{2}+2(n-1)n-13(n-1)$

$=-2+2n^2-2n-13n+13=2n^2-15n+11$ ……①

$n=1$ のとき　$b_1=-2$ となり，① を満たす．

したがって　$a_n=2^nb_n=2^n(2n^2-15n+11)$

(2) $a_n>a_{n+1}$ から　$2^n(2n^2-15n+11)>2^{n+1}\{2(n+1)^2-15(n+1)+11\}$

$2^n>0$ であるから　$2n^2-15n+11>2(2n^2-11n-2)$

整理すると　$2n^2-7n-15<0$　　ゆえに　$(2n+3)(n-5)<0$

よって　$-\dfrac{3}{2}<n<5$　　n は自然数であるから　$n=1$，2，3，4

(3) (2) から，$1\leqq n\leqq4$ のとき　$a_n>a_{n+1}$，

$n=5$　　のとき　$a_n=a_{n+1}$，

$6\leqq n$　　のとき　$a_n<a_{n+1}$

ゆえに　$a_1>a_2>a_3>a_4>a_5=a_6<a_7<a_8<\cdots\cdots$

よって，$n=5$，6 のとき最小となる．

$\boxed{3}$［2003 金沢大］

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=36$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+3}n-17\cdot2^{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ により定められている．

(1) $b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくとき，b_n と b_{n+1} の満たす関係式を導き，$\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $a_n>a_{n+1}$ となるような n の値の範囲，および a_n が最小となるような n の値を求めよ．

(3) $S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ とおくとき，S_n が最小となるような n の値をすべて求めよ．

(1) $a_{n+1}=2a_n+2^{n+3}n-17\cdot2^{n+1}$ の両辺を 2^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^n}+4n-17$

$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ であるから　$b_{n+1}=b_n+4n-17$　　すなわち　$b_{n+1}-b_n=4n-17$

$n\geqq2$ のとき　$b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(4k-17)=\dfrac{a_1}{2}+2(n-1)n-17(n-1)$

$=18+2n^2-2n-17n+17=2n^2-19n+35$ ……①

$n=1$ のとき　$b_1=\dfrac{a_1}{2}=18$ となり，①を満たす．

したがって　$a_n=2^nb_n=2^n(2n^2-19n+35)=2^n(n-7)(2n-5)$

(2) $a_n>a_{n+1}$ から　$2^n(2n^2-19n+35)>2^{n+1}\{2(n+1)^2-19(n+1)+35\}$

$2^n>0$ であるから　$2n^2-19n+35>2(2n^2-15n+18)$

整理すると　$2n^2-11n+1<0$　　よって　$n(2n-11)<-1$

n は自然数であるから　$n=1$，2，3，4，5

ゆえに，$1\leqq n\leqq5$ のとき　$a_n>a_{n+1}$，

$6\leqq n$　　のとき　$a_n<a_{n+1}$

よって　$a_1>a_2>a_3>a_4>a_5>a_6<a_7<a_8<a_9<\cdots\cdots$

したがって，a_n が最小となる n の値は $n=6$

(3) $a_n\leqq0$とすると　$2^n(n-7)(2n-5)\leqq0$　　$2^n>0$ であるから　$\dfrac{5}{2}\leqq n\leqq7$

n は自然数であるから　$n=3$，4，5，6，7

ゆえに　$n=1$，2 のとき　$a_n>0$，

$3\leqq n\leqq6$ のとき　$a_n<0$，

$n=7$　　のとき　$a_n=0$，

$8\leqq n$　　のとき　$a_n>0$

したがって　$S_1<S_2>S_3>S_4>S_5>S_6=S_7<S_8<\cdots\cdots$

また　$S_6=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$

$<a_1+a_2+a_3=a_1+20-32$

$<a_1=S_1$

よって，S_n を最小とする n の値は　$n=6$，7

金沢大学入試問題2003

4 ［2003 金沢大］

x の 3 次関数 $f(x)=x^3-kx^2+4k$ について

(1)　$x \geqq 0$ のとき常に $f(x) \geqq 0$ となるような定数 k の値の範囲を求めよ．

(2)　$y=f(x)$ のグラフが k の値によらずに通る 2 つの点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$ $(a<b)$ を求めよ．更に，$a<x<b$ のとき常に $y=f(x)$ のグラフが線分 AB よりも上にあるような定数 k の値の範囲を求めよ．

(1)　$f(0) \geqq 0$ であるから $k \geqq 0$ であることが必要．

$f(x)=x^3-kx^2+4k$,

$f'(x)=3x^2-2kx=3x\left(x-\dfrac{2}{3}k\right)$

[1]　$k=0$ のとき

$f(x)=x^3$ となり適する．

[2]　$k>0$ のとき

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}k$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗

$f\left(\dfrac{2}{3}k\right) \geqq 0$ から　$\dfrac{8}{27}k^3-\dfrac{4}{9}k^3+4k \geqq 0$

$k>0$ であるから　$k^2 \leqq 27$

ゆえに　$0<k \leqq 3\sqrt{3}$

以上をまとめると　$0 \leqq k \leqq 3\sqrt{3}$

(2)　$y=x^3-kx^2+4k$ とおくと　$(x^2-4)k+y-x^3=0$

これが k の恒等式であるから　$x^2-4=0$，$y-x^3=0$

よって　$x=\pm 2$，$y=\pm 8$　(複号同順)

$a<b$ であるから　$\mathrm{A}(-2,\ -8)$，$\mathrm{B}(2,\ 8)$ となる．

このとき，線分 AB は $y=4x$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ となる．

$$x^3-kx^2+4k-4x=x(x^2-4)-k(x^2-4)$$
$$=(x+2)(x-2)(x-k)$$

が $-2<x<2$ において常に正となるから　$k \geqq 2$

5 ［2003 金沢大］

定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(ax+b)^2dx$ を $I(a,\ b)$ とおく．

(1)　$I(a,\ b)$ を a，b の多項式で表せ．

(2)　$b=a+1$ のとき，$I(a,\ b)$ が最小となるような a およびそのときの $I(a,\ b)$ の値を求めよ．

(3)　$I(a,\ b)=1$ かつ $b=ma+n$ となる $(a,\ b)$ がちょうど 1 組のとき，実数 m，n の満たす条件を求めよ．

(1)　$I(a,\ b)=\displaystyle\int_0^1(a^2x^2+b^2)dx=\left[\frac{1}{3}a^2x^3+b^2x\right]_0^1=\frac{1}{3}a^2+b^2$

(2)　$b=a+1$ であるから　$I(a,\ b)=\dfrac{1}{3}a^2+(a+1)^2=\dfrac{4}{3}a^2+2a+1=\dfrac{4}{3}\left(a+\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{1}{4}$

よって，$a=-\dfrac{3}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる．

(3)　$\dfrac{1}{3}a^2+b^2=1$ かつ $b=ma+n$ から　$a^2+3(ma+n)^2-3=0$

すなわち　$(3m^2+1)a^2+6mna+3(n^2-1)=0$ ……①

$3m^2+1>0$ であるから，① は a についての 2 次方程式である．

① の判別式を D とすると，解を 1 つだけもつことから　$D=0$

よって　$\dfrac{D}{4}=9m^2n^2-3(3m^2+1)(n^2-1)=0$

したがって　$3m^2-n^2+1=0$

6 ［2003 金沢大］

(1)　次の (ア)，(イ) のグラフの概形を別々にかけ．

（ア）　$y=1-|x|$

（イ）　$y=\dfrac{1}{1+|x|}$

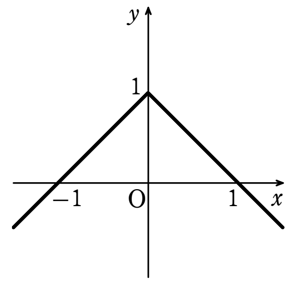
(2)　区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ において，不等式 $(ax+b)(1-x^2) \leqq 1-|x|$ が成り立つとき，定数 a，b の満たす条件を求めよ．

(3)　a，b が (2) で求めた条件を満たすとき，区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ で $y=1-|x|$ と $y=(ax+b)(1-x^2)$ のグラフによって囲まれた図形の面積を求めよ．

(1)　(ア)　$x \geqq 0$ のとき　$y=1-x$,

$x<0$ のとき　$y=1+x$

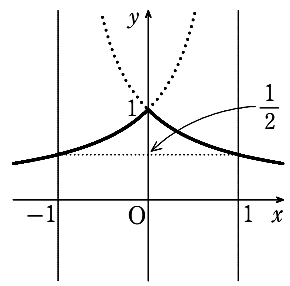
よって，グラフの概形は右図のようになる．



（イ）　$x \geqq 0$ のとき　$y=\dfrac{1}{1+x}$,

$x<0$ のとき　$y=\dfrac{1}{1-x}$

よって，グラフの概形は右図のようになる．



(2)　$|x|^2=x^2$ であるから　$(ax+b)(1-|x|^2) \leqq 1-|x|$

ゆえに　$(ax+b)(1+|x|)(1-|x|) \leqq 1-|x|$

$|x|=1$ のとき，等号が成り立つ．

$|x|<1$ のとき，$0<1-|x|^2 \leqq 1$ から　$ax+b \leqq \dfrac{1}{1+|x|}$

よって，$-1<x<1$ のとき，直線 $y=ax+b$ が曲線 $y=\dfrac{1}{1+|x|}$ の下側にあればよい．

すなわち，$f(x)=ax+b$ とおいたとき，$f(-1) \leqq \dfrac{1}{2}$ かつ $f(1) \leqq \dfrac{1}{2}$ が成り立てばよい．したがって　$b-a \leqq \dfrac{1}{2}$ かつ $b+a \leqq \dfrac{1}{2}$

(3)　(2) から，求める面積は

$$\int_{-1}^{1}\{(1-|x|)-(ax+b)(1-x^2)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(1-|x|-ax+ax^3-b+bx^2)dx$$

$$=2\int_0^1(1-x-b+bx^2)dx$$

$=2\left[x-\frac{x^2}{2}-bx+\frac{b}{3}x^3\right]_0^1$

$=1-\frac{4}{3}b$