# 金沢大学入試問題2004

$\boxed{1}$ [2004 金沢大]

座標平面上の曲線 $C: y=|x^2-1|$ と傾き $a$ の直線 $l: y=a(x+1)$ が異なる 3 点で交わっているとする.

(1) $a$ のとりうる値の範囲を求めよ.

(2) $C$ と $l$ で囲まれた 2 つの図形の面積の和 $S$ を $a$ を用いて表せ.

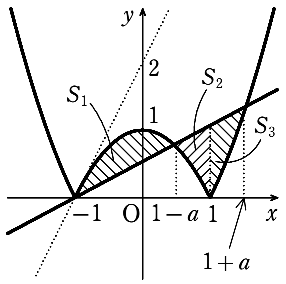
(3) $S$ が最小になる $a$ の値を求めよ.

(1) $C$ と $l$ はともに点 $(-1,\ 0)$ を通る.

また, $a=2$ のとき, $l$ は $y=-(x^2-1)$ と点 $(-1,\ 0)$ で接する.

よって, $C$ と $l$ が異なる 3 点で交わるような $a$ の値の範囲は $0<a<2$

(2) 図のように面積 $S_1$, $S_2$, $S_3$ を定める.




$S_1=\int_{-1}^{1-a}\{-x^2+1-a(x+1)\}dx$

$=-\int_{-1}^{1-a}(x+1)(x-1+a)dx$

$=-\dfrac{-1}{6}\{(1-a)-(-1)\}^3=\dfrac{1}{6}(2-a)^3$

$S_2=\int_{1-a}^{1}\{a(x+1)-(-x^2+1)\}dx$

$=\int_{1-a}^{1}(x+1)(x-1+a)dx$

$=\int_{1-a}^{1}\{(x-1+a)^2+(2-a)(x-1+a)\}dx=\left[\dfrac{1}{3}(x-1+a)^3+\dfrac{2-a}{2}(x-1+a)^2\right]_{1-a}^{1}$

$=\dfrac{1}{3}a^3+\dfrac{1}{2}(2-a)a^2$

$S_3=\int_{1}^{1+a}\{a(x+1)-(x^2-1)\}dx=-\int_{1}^{1+a}(x+1)(x-1-a)dx$

$=-\int_{1}^{1+a}\{(x-1-a)^2+(2+a)(x-1-a)\}dx$

$=-\left[\dfrac{1}{3}(x-1-a)^3+\dfrac{2+a}{2}(x-1-a)^2\right]_{1}^{1+a}$

$=-\dfrac{1}{3}a^3+\dfrac{1}{2}(2+a)a^2$

ゆえに

$S=S_1+S_2+S_3=\dfrac{1}{6}(2-a)^3+\dfrac{1}{2}(2-a)a^2+\dfrac{1}{2}(2+a)a^2=-\dfrac{1}{6}a^3+3a^2-2a+\dfrac{4}{3}$

(3) (2) の結果から $\dfrac{dS}{da}=-\dfrac{1}{2}a^2+6a-2\ (0<a<2)$

したがって, $S$ の増減表は次のようになる.

| $a$ | 0 | $\cdots$ | $6-4\sqrt{2}$ | $\cdots$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{dS}{da}$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $S$ | | ↘ | 極小 | ↗ | |

$S$ が最小になる $a$ の値は $a=6-4\sqrt{2}$

$\boxed{2}$ [2004 金沢大]

複素数 $z$ に対し, $w=iz^2$ とおく. ただし, $i$ は虚数単位である.

(1) $z=a(\cos\theta+i\sin\theta)$ ($a$ は正の実数) において, $\theta$ が $0°\leqq\theta\leqq 90°$ の範囲を動くとき, $w$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ.

(2) $z=x+iy$ ($x$, $y$ は実数) が直線 $x=1$ 上を動くとき, $w$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ.

(3) $z=x+iy$ ($x$, $y$ は実数) において, $x$, $y$ が $0\leqq x\leqq 1$, $0\leqq y\leqq 1$, $x^2+y^2\geqq 1$ を満たしながら動くとき, $w$ が動く範囲を複素数平面上に図示せよ.

$w=p+qi$ ($p$, $q$ は実数) とおく.

(1) $w=iz^2$, $z=a(\cos\theta+i\sin\theta)$ から

$p+qi=ia^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$

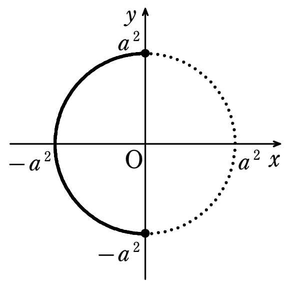
$=-a^2\sin 2\theta+ia^2\cos 2\theta$

$=a^2\{\cos(2\theta+90°)+i\sin(2\theta+90°)\}$ …… ①

ここで $0°\leqq\theta\leqq 90°$ から

$90°\leqq 2\theta+90°\leqq 270°$

図示すると右図のようになる.




(2) $w=iz^2$, $z=x+iy$ から

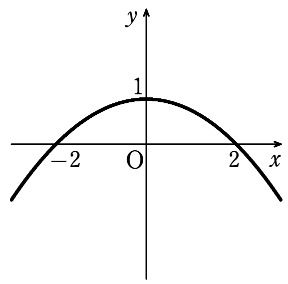
$p+qi=i(x+iy)^2=-2xy+i(x^2-y^2)$

よって $p=-2xy$, $q=x^2-y^2$ …… ②

$x=1$ とすると $p=-2y$, $q=1-y^2$

$y$ を消去して $q=-\dfrac{p^2}{4}+1$

図示すると右図のようになる.




(3) $x^2+y^2\geqq 1$, $x\geqq 0$, $y\geqq 0$ は, (1) において $a^2\geqq 1$ かつ $0°\leqq\theta\leqq 90°$ と同値である.

ゆえに, ① から $|w|\geqq 1$ かつ $90°\leqq\arg w\leqq 270°$ …… ③

また, $0\leqq x\leqq 1$ となる条件を求める.

[1] $x=0$ のとき, $0\leqq y\leqq 1$ となる条件は, ② から $p=0$, $-1\leqq q\leqq 0$

[2] $x\neq 0$ のとき

② から $p^2=4x^2y^2$, $q=x^2-y^2$

$y$ を消去して $p^2=4x^2(x^2-q)$

よって $4x^4-4qx^2-p^2=0$

これが $0<x\leqq 1$ となる解をもてばよい.

$t=x^2$ とすると $4t^2-4qt-p^2=0$

$f(t)=4t^2-4qt-p^2$ とする.

方程式 $f(t)=0$ が $0<t\leqq 1$ となる解をもてばよい.

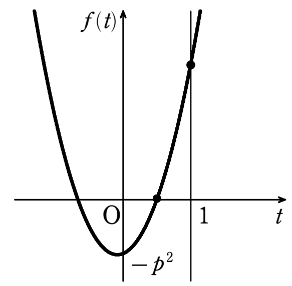
$f(0)=-p^2\leqq 0$ であるから, 図より, 求める条件は

$f(1)\geqq 0$

すなわち $4-4q-p^2\geqq 0$

よって $q\leqq -\dfrac{p^2}{4}+1$

これを満たす $p$, $q$ について, 実数 $x$, $y$ $(0<x\leqq 1)$ がただ 1 つ存在する.



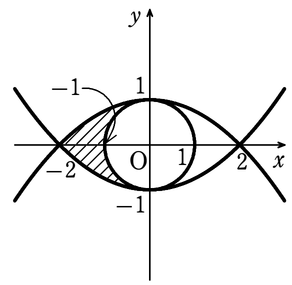

[1], [2] を合わせて $q\leqq -\dfrac{p^2}{4}+1$ …… ④

また, $0\leqq y\leqq 1$ となる条件についても同様にして

$q\geqq\dfrac{p^2}{4}-1$ …… ⑤

よって, $w$ の動く範囲は ③, ④, ⑤ の表す領域の共通部分である.

図示すると右図のようになる. ただし, 境界線を含む.



# 金沢大学入試問題2004

$\boxed{3}$［2004 金沢大］

複素数平面上で中心が 1，半径 1 の円を $C$ とする．以下，$i$ は虚数単位とする．

(1)　$C$ 上の点 $z=1+\cos t+i\sin t$ $(-180°<t<180°)$ について，$z$ の絶対値および偏角を $t$ を用いて表せ．また，$\dfrac{1}{z^2}$ を極形式で表せ．

(2)　$z$ が円 $C$ 上の 0 でない点を動くとき，$w=\dfrac{2i}{z^2}$ は複素数平面上で放物線を描くことを示し，この放物線を図示せよ．

(1)　$z=1+\cos t+i\sin t=2\cos^2\dfrac{t}{2}+2i\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}$

$\quad=2\cos\dfrac{t}{2}\left(\cos\dfrac{t}{2}+i\sin\dfrac{t}{2}\right)$

ここで，$-90°<\dfrac{t}{2}<90°$ であるから　$\cos\dfrac{t}{2}>0$

したがって，$z$ の絶対値は $2\cos\dfrac{t}{2}$，偏角は $\dfrac{t}{2}$

また　$z^2=4\cos^2\dfrac{t}{2}\left(\cos\dfrac{t}{2}+i\sin\dfrac{t}{2}\right)^2=2(1+\cos t)(\cos t+i\sin t)$

したがって　$\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{1}{2(1+\cos t)}\{\cos(-t)+i\sin(-t)\}$　…… ①

(2)　$w=\dfrac{2i}{z^2}=x+yi$ ($x$，$y$ は実数) とおくと，① から

$x+yi=\dfrac{i}{1+\cos t}(\cos t-i\sin t)$

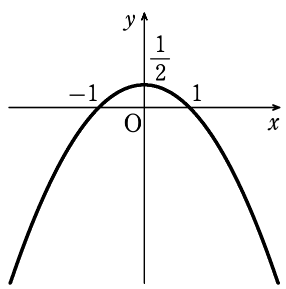
$\quad=\dfrac{1}{1+\cos t}(\sin t+i\cos t)$

したがって　$x=\dfrac{\sin t}{1+\cos t}$，$y=\dfrac{\cos t}{1+\cos t}$

よって　$x^2=\dfrac{\sin^2 t}{(1+\cos t)^2}=\dfrac{1-\cos^2 t}{(1+\cos t)^2}=\dfrac{1-\cos t}{1+\cos t}$

$\quad=1-\dfrac{2\cos t}{1+\cos t}=1-2y$

ゆえに，$w$ は複素数平面上で放物線 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ を描く．図示すると右図のようになる．




$\boxed{4}$［2004 金沢大］

座標平面上で動点 P が，$x$ 軸の正の方向へ 1 進むことを文字 a で表し，$y$ 軸の正の方向へ 1 進むことを文字 b で表し，停留することを文字 c で表す．a，b，c からなる文字列が与えられたとき，点 P は原点を出発し，その文字列に従って移動する．たとえば，長さ 4 の文字列 acab に対しては，点 P は原点 (0，0) から出発して，(1，0)，(1，0)，(2，0)，(2，1) と移動し，点 (2，1) が到達点となる．

(1)　$n$ を自然数とする．長さ $n$ の文字列の中で，点 P の到達点の $x$ 座標と $y$ 座標の和が $n$ となる文字列は何個あるか．

(2)　$k$，$n$ を自然数とし，$1\leqq k\leqq n$ とする．長さ $n$ の文字列の中で，点 P の到達点の $x$ 座標と $y$ 座標の和が $k$ となる文字列の個数を $F_n(k)$ とする．$F_n(k)$ を $k$ と $n$ を用いて表せ．

(3)　自然数 $n$ が与えられたとき，$F_n(k)$ が最大になる自然数 $k$ の値を求めよ．

(1)　点 P の到達点の $x$ 座標と $y$ 座標の和が $n$ となる文字列は，a と b を合わせて $n$ 個並べた順列である．

よって，求める文字列の個数は 2 個の文字 a，b から $n$ 個を取り出す重複順列の個数に等しいから　$2^n$ 個

(2)　点 P の到達点の $x$ 座標と $y$ 座標の和が $k$ となる文字列は，a と b を合わせて $k$ 個，c を $n-k$ 個並べた順列である．

a または b が入る位置の選び方は　${}_n\mathrm{C}_k$ 通り

2 個の文字 a，b から $k$ 個を取り出す重複順列の個数は　$2^k$ 個

よって　$F_n(k)={}_n\mathrm{C}_k\cdot 2^k=\dfrac{2^k n!}{k!(n-k)!}$

(3)　$2\leqq k\leqq n$ のとき　$\dfrac{F_n(k)}{F_n(k-1)}=\dfrac{\dfrac{2^k n!}{k!(n-k)!}}{\dfrac{2^{k-1}n!}{(k-1)!(n-k+1)!}}=\dfrac{2(n-k+1)}{k}$

$F_n(k)\geqq F_n(k-1)$ すなわち $\dfrac{F_n(k)}{F_n(k-1)}\geqq 1$ とすると　$2(n-k+1)\geqq k$

よって　$k\leqq\dfrac{2(n+1)}{3}$

また，$\dfrac{F_n(k)}{F_n(k-1)}\leqq 1$ とすると　$k\geqq\dfrac{2(n+1)}{3}$

[1]　$n=3m$ ($m$ は自然数) のとき　$k\leqq\dfrac{2(n+1)}{3}$ から　$k\leqq 2m+\dfrac{2}{3}$

これを満たす最大の自然数 $k$ は　$2m$　すなわち $\dfrac{2}{3}n$

よって　$2\leqq k\leqq\dfrac{2}{3}n$ のとき　$F_n(k)>F_n(k-1)$

$\dfrac{2}{3}n+1\leqq k\leqq n$ のとき　$F_n(k)<F_n(k-1)$

ゆえに　$F_n(1)<F_n(2)<\cdots\cdots<F_n\left(\dfrac{2}{3}n\right)>F_n\left(\dfrac{2}{3}n+1\right)>\cdots\cdots>F_n(n)$

よって，$F_n(k)$ が最大になる $k$ は　$\dfrac{2}{3}n$

[2]　$n=3m-1$ ($m$ は自然数) のとき　$k\leqq\dfrac{2(n+1)}{3}$ から　$k\leqq 2m$

これを満たす最大の自然数 $k$ は　$2m$　すなわち $\dfrac{2(n+1)}{3}$

(i)　$n=2$ のとき　$F_2(1)=F_2(2)$

よって，$F_n(k)$ が最大になる $k$ は　1，2

(ii)　$n\geqq 3$ のとき

$2\leqq k\leqq\dfrac{2(n+1)}{3}-1$ で　$F_n(k)>F_n(k-1)$

$k=\dfrac{2(n+1)}{3}$ で　$F_n(k)=F_n(k-1)$

$\dfrac{2(n+1)}{3}+1\leqq k\leqq n$ で　$F_n(k)<F_n(k-1)$

ゆえに

$F_n(1)<F_n(2)<\cdots<F_n\left(\dfrac{2n-1}{3}\right)=F_n\left(\dfrac{2(n+1)}{3}\right)>F_n\left(\dfrac{2n+5}{3}\right)>\cdots>F_n(n)$

よって，$F_n(k)$ が最大になる $k$ は　$\dfrac{2n-1}{3}$，$\dfrac{2(n+1)}{3}$

(これは $n=2$ のときも成り立つ)

[3]　$n=3m-2$ ($m$ は自然数) のとき

$k\leqq\dfrac{2(n+1)}{3}$ から　$k\leqq 2m-\dfrac{2}{3}$

これを満たす最大の自然数 $k$ は　$2m-1$　すなわち $\dfrac{2n+1}{3}$

[1] と同様に考えて，$F_n(k)$ が最大になる $k$ は　$\dfrac{2n+1}{3}$

以上から，求める $k$ は，$m$ を自然数として

$n=3m$ のとき　$\dfrac{2}{3}n$

$n=3m-1$ のとき　$\dfrac{2n-1}{3}$，$\dfrac{2(n+1)}{3}$

$n=3m-2$ のとき　$\dfrac{2n+1}{3}$

# 金沢大学入試問題2004

$\boxed{5}$ [2004 金沢大]

座標平面上で動点Pが，$x$ 軸の正の方向へ1進むことを文字aで表し，$y$ 軸の正の方向へ1進むことを文字bで表し，停留することを文字cで表す．a，b，cからなる文字列が与えられたとき，点Pは原点を出発し，その文字列に従って移動する．

たとえば，長さ4の文字列acabに対しては，点Pは原点 $(0,\ 0)$ から出発して，$(1,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(2,\ 1)$ と移動し，点 $(2,\ 1)$ が到達点となる．長さ $n$ の文字列の中で，点Pの到達点が $(p,\ q)$ となる文字列の個数を $F_n(p,\ q)$ とする．

(1) $F_n(p,\ q)$ を $p$，$q$，$n$ を用いて表せ．ただし，$n$ は自然数，$p$，$q$ は $p\geqq 0$，$q\geqq 0$，$p+q\leqq n$ の範囲の整数とする．

(2) 自然数 $n$ が与えられているとき，$F_n(p-1,\ q)\leqq F_n(p,\ q)$ を満たす整数 $p$，$q$ の組 $(p,\ q)$ $(p\geqq 1,\ q\geqq 0,\ p+q\leqq n)$ の存在する範囲を図示せよ．
また，$F_n(p,\ q-1)\leqq F_n(p,\ q)$ を満たす整数 $p$，$q$ の組 $(p,\ q)$ $(p\geqq 0,\ q\geqq 1,\ p+q\leqq n)$ の存在する範囲を図示せよ．

(3) $n+1$ が3の倍数となる自然数 $n$ が与えられているとき，$F_n(p,\ q)$ が最大になる自然数 $p$，$q$ の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ．

(1) aを $p$ 個，bを $q$ 個，cを $n-(p+q)$ 個並べる順列によって，到達点が $(p,\ q)$ となる長さ $n$ の文字列が作られる．

したがって，$p\geqq 0$，$q\geqq 0$，$p+q\leqq n$ として　$F_n(p,\ q)=\dfrac{n!}{p!q!(n-p-q)!}$　……①

(2) ①と $F_n(p-1,\ q)\leqq F_n(p,\ q)$ から

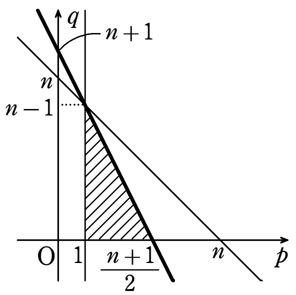
$$(p-1)!q!(n-p-q+1)!\geqq p!q!(n-p-q)!$$

したがって　$n-p-q+1\geqq p$

よって　$2p+q\leqq n+1$

（ただし $p\geqq 1$，$q\geqq 0$，$p+q\leqq n$）

ゆえに，整数の組 $(p,\ q)$ はこの領域に含まれる格子点である．図示すると右図のようになる．ただし，境界線を含む．

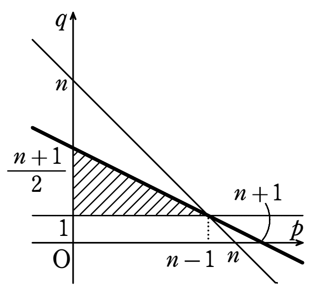



また，①と $F_n(p,\ q-1)\leqq F_n(p,\ q)$ から同様にして

$p+2q\leqq n+1$

（ただし，$p\geqq 0$，$q\geqq 1$，$p+q\leqq n$）

ゆえに，整数の組 $(p,\ q)$ はこの領域に含まれる格子点である．図示すると右図のようになる．ただし，境界線を含む．




(3) $F_n(p,\ q)$ が最大であるとすると，以下の4つの条件が必要である．

$F_n(p,\ q)\geqq F_n(p-1,\ q)$　……②，$F_n(p,\ q)\geqq F_n(p,\ q-1)$　……③，

$F_n(p,\ q)\geqq F_n(p+1,\ q)$　……④，$F_n(p,\ q)\geqq F_n(p,\ q+1)$　……⑤

(2)の結果から，②より $2p+q\leqq n+1$，　③より $p+2q\leqq n+1$

また，④から　$p!q!(n-p-q)!\leqq(p+1)!q!(n-p-q-1)!$

すなわち　$2p+q\geqq n-1$

⑤から，同様に　$p+2q\geqq n-1$

これらを満たす $(p,\ q)$ は右図の斜線部分（境界線を含む）に含まれる格子点である．

すなわち，②～⑤を満たす $(p,\ q)$ はこの領域に含まれていなければならない．

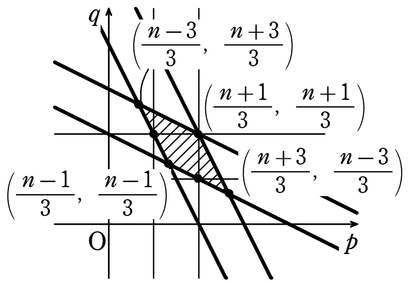
逆に，この領域内にない点 $(p_0,\ q_0)$ については，②～⑤の不等号を逆にした不等式

$F_n(p_0,\ q_0)<F_n(p_0-1,\ q_0)$

$F_n(p_0,\ q_0)<F_n(p_0,\ q_0-1)$

$F_n(p_0,\ q_0)<F_n(p_0+1,\ q_0)$

$F_n(p_0,\ q_0)<F_n(p_0,\ q_0+1)$




のいずれかが成り立ち，$p_0$ と $p$，$q_0$ と $q$ の大小に応じて，これを繰り返し用いることにより，$F_n(p_0,\ q_0)<F_n(p,\ q)$ であることがわかる．

ゆえに，$(p,\ q)$ が図の領域に含まれる格子点であるとき $F_n(p,\ q)$ は最大となる．

$n+1$ が3の倍数であるから，$\left(\dfrac{n+1}{3},\ \dfrac{n+1}{3}\right)$ は格子点である．

$$\frac{n+1}{3}-2<\frac{n-3}{3}<\frac{n+1}{3}-1<\frac{n-1}{3}<\frac{n+1}{3}<\frac{n+3}{3}<\frac{n+1}{3}+1$$

であるから，図より，領域に含まれる格子点は

$$\left(\frac{n+1}{3},\ \frac{n+1}{3}\right),\ \left(\frac{n+1}{3}-1,\ \frac{n+1}{3}\right),\ \left(\frac{n+1}{3},\ \frac{n+1}{3}-1\right)$$

ここで，$\dfrac{n+1}{3}=1$ すなわち $n=2$ のとき，$\dfrac{n+1}{3}-1=0$ であるから，$\dfrac{n+1}{3}-1$ は自然数にならない．

したがって，求める $(p,\ q)$ の組は

$n=2$ のとき　$(1,\ 1)$

$n>2$ のとき　$\left(\dfrac{n+1}{3},\ \dfrac{n+1}{3}\right)$，$\left(\dfrac{n-2}{3},\ \dfrac{n+1}{3}\right)$，$\left(\dfrac{n+1}{3},\ \dfrac{n-2}{3}\right)$

$\boxed{6}$ [2004 金沢大]

座標平面上で，半径 $r$ の2つの円 $O_1$，$O_2$ の中心をそれぞれ $(r,\ r)$，$(1-r,\ 1-r)$ とする．円 $O_1$ の内部と円 $O_2$ の内部の少なくとも一方に属する点からなる領域をDとし，領域Dの面積を $S$ とする．以下，$r$ は $0<r\leqq\dfrac{1}{2}$ の範囲を動くとする．

(1) 円 $O_1$ と円 $O_2$ が接するときの半径 $r$ の値を求めよ．

(2) 円 $O_1$ と円 $O_2$ が2点P，Qで交わるとする．$\theta=\dfrac{1}{2}\angle PO_1Q$ とおいて，半径 $r$ と面積 $S$ を $\theta$ を用いて表せ．

(3) 面積 $S$ が最大となる半径 $r$ の値を求めよ．

(1) $0<r\leqq\dfrac{1}{2}$ ……①より $1-r\geqq r$ であるから，$O_1$，$O_2$ の $x$ 座標の差 $(>0)$ は

$(1-r)-r=1-2r$

2点 $O_1$，$O_2$ はどちらも直線 $y=x$ 上にあるから　$O_1O_2=\sqrt{2}(1-2r)$　……②

円 $O_1$ と円 $O_2$ が接するとき，$O_1O_2=$（2円の半径の和）であるから

$\sqrt{2}(1-2r)=2r$

これを解いて　$r=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$　（①に適する）

(2) 異なる2円 $O_1$，$O_2$ が2点P，Qで交わる条件は

（2円の半径の差）$<O_1O_2<$（2円の半径の和）

よって　$0<\sqrt{2}(1-2r)<2r$

ゆえに　$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<r<\dfrac{1}{2}$

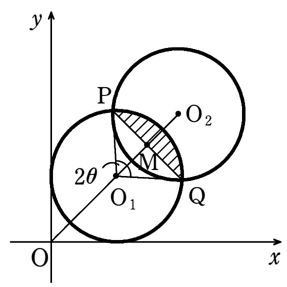
右の図のように線分PQの中点をMとすると

$O_1M=\dfrac{1}{2}O_1O_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-2r)$

また　$O_1M=O_1P\cos\theta$

よって　$\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-2r)=r\cos\theta$

ゆえに　$r=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}\cos\theta}$　……③




また　$\angle PO_1Q=2\theta$ から，領域Dの面積 $S$ は

$$S=\pi r^2+\pi r^2-2\left(\frac{1}{2}r^2\cdot 2\theta-\frac{1}{2}r^2\sin 2\theta\right)=r^2(2\pi-2\theta+\sin 2\theta)$$

したがって，③から　$S=\dfrac{2\pi-2\theta+\sin 2\theta}{(2+\sqrt{2}\cos\theta)^2}$　$\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$　……④

(3) $r=\dfrac{1}{2}$ のとき2円 $O_1$，$O_2$ は一致して，(2)の交点P，Qは存在しないが，このときの $S$ は④において，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ の場合として表される．

$$\frac{dS}{d\theta}=\frac{(-2+2\cos 2\theta)(2+\sqrt{2}\cos\theta)^2}{(2+\sqrt{2}\cos\theta)^4}$$

$$-\frac{(2\pi-2\theta+\sin 2\theta)\cdot 2(2+\sqrt{2}\cos\theta)\cdot(-\sqrt{2}\sin\theta)}{(2+\sqrt{2}\cos\theta)^4}$$

$$=\frac{(\cos 2\theta-1)(\sqrt{2}+\cos\theta)+(2\pi-2\theta+\sin 2\theta)\sin\theta}{(\sqrt{2}+\cos\theta)^3}$$

$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で　(分母)$=(\sqrt{2}+\cos\theta)^3>0$

(分子)$=\sqrt{2}\cos 2\theta+\cos 2\theta\cos\theta-\sqrt{2}-\cos\theta+2(\pi-\theta)\sin\theta+\sin 2\theta\sin\theta$

ここで，$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$，$\cos 2\theta\cos\theta+\sin 2\theta\sin\theta=\cos(2\theta-\theta)=\cos\theta$ であるから

$$\begin{aligned}(\text{分子})&=\sqrt{2}(1-2\sin^2\theta)+\cos\theta-\sqrt{2}-\cos\theta+2(\pi-\theta)\sin\theta\\&=-2\sqrt{2}\sin^2\theta+2(\pi-\theta)\sin\theta=2(\pi-\theta-\sqrt{2}\sin\theta)\sin\theta\end{aligned}$$

ここで，$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$，$0<\sin\theta\leqq 1$ から　$\pi-\theta-\sqrt{2}\sin\theta\geqq\dfrac{\pi}{2}-\sqrt{2}>0$

したがって，$\dfrac{dS}{d\theta}>0$ であるから，$S$ は $0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で単調に増加し，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ で最大値をとる．

このとき，③ から　$r=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2}}=\dfrac{1}{2}$

$\boxed{7}$ [2004 金沢大]

(1)　関数 $y=\dfrac{1}{e^{-x}+1}$ のグラフの概形をかけ．

(2)　$g_a(r)=\displaystyle\int_{-1}^{r}\left(\frac{1}{e^{-x}+1}-\frac{1}{e^{a-x}+1}\right)dx$ とする．ただし，$a>0$ である．このとき，$\displaystyle\lim_{r\to\infty}g_a(r)$ を求めよ．

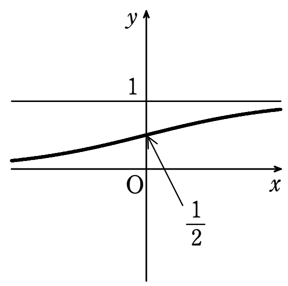
(3)　$h(a)=\displaystyle\lim_{r\to\infty}g_a(r)$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{h(a)}{a}$ を求めよ．

(1)　$y'=\dfrac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2}$

常に $y'>0$ であるから $y$ は単調に増加する．

また　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=1$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}y=0$

グラフは右図のようになる．




参考　凹凸を調べると以下のようになる．

$$y''=\frac{-e^{-x}(e^{-x}+1)^2-e^{-x}\cdot 2(e^{-x}+1)\cdot(-e^{-x})}{(e^{-x}+1)^4}$$

$$=\frac{e^{-x}(e^{-x}-1)}{(e^{-x}+1)^3}$$

よって，$y$ の増減とグラフの凹凸は次のようになる．

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $y''$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | ↗ | $\frac{1}{2}$ | ↗ |

(2)　$g_a(r)=\displaystyle\int_{-1}^{r}\left(\frac{1}{e^{-x}+1}-\frac{1}{e^{a-x}+1}\right)dx=\int_{-1}^{r}\left(\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{e^x}{e^x+e^a}\right)dx$

$$=\int_{-1}^{r}\left\{\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}-\frac{(e^x+e^a)'}{e^x+e^a}\right\}dx=\Big[\log(e^x+1)-\log(e^x+e^a)\Big]_{-1}^{r}$$

$$=\left[\log\frac{e^x+1}{e^x+e^a}\right]_{-1}^{r}=\log\frac{e^r+1}{e^r+e^a}-\log\frac{e^{-1}+1}{e^{-1}+e^a}$$

ここで　$r\longrightarrow\infty$ のとき　$\dfrac{e^r+1}{e^r+e^a}=\dfrac{1+e^{-r}}{1+e^{a-r}}\longrightarrow 1$

したがって　$\displaystyle\lim_{r\to\infty}g_a(r)=-\log\frac{e^{-1}+1}{e^{-1}+e^a}=-\log\frac{e+1}{e^{a+1}+1}=\log\frac{e^{a+1}+1}{e+1}$

(3)　(2) の結果から　$h(a)=\log(e^{a+1}+1)-\log(e+1)$

よって　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{h(a)}{a}=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}\log e^a(e+e^{-a})-\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}\log(e+1)$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{a}{a}+\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}\log(e+e^{-a})=1$$