金沢大学入試問題2006，2005

$\boxed{1}$［2006 金沢大］

xy 平面上の円 $C: x^2+y^2=3$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(0,\ \sqrt{3})$，$\mathrm{B}(0,\ -\sqrt{3})$ がある。点 $\mathrm{P}(0,\ \sqrt{2})$ を通る直線と円 C の交点を Q，R とする。ただし，点 R は第 1 象限にあり，

$\angle\mathrm{APR}=\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。

(1) 原点 O から線分 QR へ垂線を引き，QR との交点を S とする。線分 OS，QR の長さをそれぞれ θ を用いて表せ。

(2) $\triangle\mathrm{AQB}$ と $\triangle\mathrm{ABR}$ の面積をそれぞれ T_1，T_2 とする。$T_1=\sqrt{3}\,\mathrm{QP}\sin\theta$，$T_2=\sqrt{3}\,\mathrm{PR}\sin\theta$ が成り立つことを示し，四角形 AQBR の面積 $S(\theta)$ を求めよ。

(3) (2) の $S(\theta)$ に対して，$2\sqrt{3}<S(\theta)$ を満たす θ の値の範囲を求めよ。

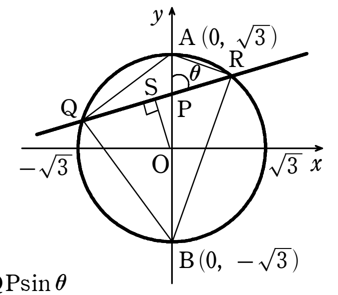
(1) $\mathrm{OP}=\sqrt{2}$，$\angle\mathrm{OPS}=\theta$ から

$\mathrm{OS}=\mathrm{OP}\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$

S は円 O の弦 QR の中点であるから

$\mathrm{QR}=2\mathrm{QS}=2\sqrt{\mathrm{OQ}^2-\mathrm{OS}^2}$

$=2\sqrt{3-2\sin^2\theta}$



(2) $\triangle\mathrm{AQB}$，$\triangle\mathrm{ABR}$ において，辺 AB を底辺とみると，高さはそれぞれ $\mathrm{QP}\sin\theta$，$\mathrm{PR}\sin\theta$ で表されるから

$T_1=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\mathrm{QP}\sin\theta=\sqrt{3}\,\mathrm{QP}\sin\theta$

$T_2=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\mathrm{PR}\sin\theta=\sqrt{3}\,\mathrm{PR}\sin\theta$

よって　$S(\theta)=T_1+T_2=\sqrt{3}(\mathrm{QP}+\mathrm{PR})\sin\theta=\sqrt{3}\,\mathrm{QR}\sin\theta$

$=\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3-2\sin^2\theta}\cdot\sin\theta$

$=2\sqrt{3}\sin\theta\sqrt{3-2\sin^2\theta}$

(3) $S(\theta)>2\sqrt{3}$ から　$\sin\theta\sqrt{3-2\sin^2\theta}>1$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $\sin\theta$ は正で，両辺ともに正であるから，両辺を 2 乗しても同値である。

よって　$\sin^2\theta(3-2\sin^2\theta)>1$

$2\sin^4\theta-3\sin^2\theta+1<0$

$(2\sin^2\theta-1)(\sin^2\theta-1)<0$

$\dfrac{1}{2}<\sin^2\theta<1$

$\sin\theta$ は正であるから　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\sin\theta<1$

したがって　$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

$\boxed{2}$［2006 金沢大］

放物線 $y=-x^2+2x$ を H_1，また放物線 $y=x^2$ を H_2 で表す。H_1 上の点 P $(a,\ -a^2+2a)$ における H_1 の接線を ℓ とする。

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ。また，a の値に関係なく，ℓ は H_2 と異なる 2 点で交わることを示せ。

(2) 接線 ℓ と放物線 H_2 の異なる 2 つの交点を結ぶ線分の中点を Q とする。点 P が H_1 上を動くとき，点 Q の軌跡 C の方程式を求めよ。

(3) (2) の軌跡 C と放物線 H_1 および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1) $y=-x^2+2x$ から　$y'=-2x+2$

よって，接線 ℓ の方程式は　$y-(-a^2+2a)=(-2a+2)(x-a)$

すなわち　$y=-2(a-1)x+a^2$

H_2 と ℓ の交点の x 座標は，y を消去して得られる次の 2 次方程式の解である。

$x^2=-2(a-1)x+a^2$

整理して　$x^2+2(a-1)x-a^2=0$　…… ①

① の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(a-1)^2+a^2=2\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}>0$

したがって，a の値に関係なく，ℓ は H_2 と異なる 2 点で交わる。

(2) ① の解を α，β とし，$\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とすると

$X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，　$Y=-2(a-1)X+a^2$　…… ②

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=-2(a-1)$ であるから

$X=1-a$　　よって　$a=1-X$

② に代入して　$Y=-2\cdot(-X)\cdot X+(1-X)^2$

すなわち　$Y=3X^2-2X+1$

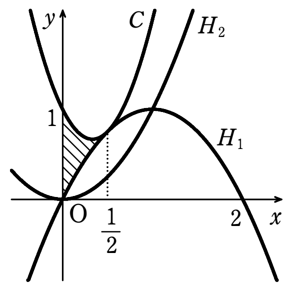
よって，C の方程式は　$y=3x^2-2x+1$

(3) $3x^2-2x+1-(-x^2+2x)=4x^2-4x+1$

$=(2x-1)^2$

よって，求める面積は

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)^2dx=\left[\frac{1}{6}(2x-1)^3\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}$$



$\boxed{3}$［2006 金沢大］

O を原点とする座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$，$\mathrm{B}(3,\ -1)$ がある。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(2) t が $0\leqq t\leqq2$ を満たしながら変化するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}+t\vec{b}$ で定められる点 P の動く範囲を図示せよ。

(3) s，t が $1\leqq s\leqq3$，$0\leqq t\leqq2$ を満たしながら変化するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ で定められる点 Q の動く範囲の面積を求めよ。

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot3+1\cdot(-1)=2$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

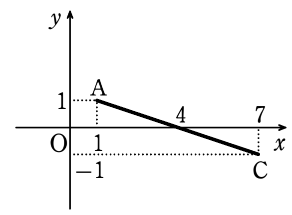
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}+t\vec{b}$ から　$(x,\ y)=(1,\ 1)+t(3,\ -1)$

$t=2$ のとき　$(x,\ y)=(7,\ -1)$

点 $(7,\ -1)$ を C とすると $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2\vec{b}$ であり，$\dfrac{t}{2}=t'$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}+\dfrac{t}{2}\cdot2\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t'\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　$(0\leqq t'\leqq1)$

よって，点 P の動く範囲は線分 AC 上で，右の図のようになる。



(3) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(x,\ y)$ とおくと

$(x,\ y)=s(1,\ 1)+t(3,\ -1)$

$s=3$，$t=0$ のとき　$(x,\ y)=(3,\ 3)$

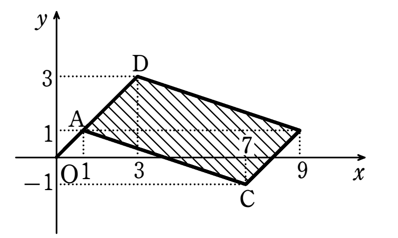
点 $(3,\ 3)$ を D とすると $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\vec{a}$ であり，

$\dfrac{s-1}{2}=s'$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{a}+(s-1)\vec{a}+t\vec{b}$

$=\vec{a}+\dfrac{s-1}{2}\cdot2\vec{a}+\dfrac{t}{2}\cdot2\vec{b}$

$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s'\overrightarrow{\mathrm{AD}}+t'\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　$(0\leqq s'\leqq1,\ 0\leqq t'\leqq1)$



よって，点 Q の動く範囲は線分 AC，AD を 2 辺とする平行四辺形の周とその内部であり，図の斜線部分である。

求める面積は　$\dfrac{1}{2}(9-1)\{(3-1)+(1+1)\}=16$

金沢大学入試問題2006, 2005

$\boxed{4}$ [2006 金沢大]

(1) 条件 $x_1=1$, $x_{n+1}=x_n+2^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定められる数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 条件 $y_1=\dfrac{4}{3}$, $\dfrac{1}{y_{n+1}}=\dfrac{4}{y_n}+\dfrac{3}{4}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定められる数列 $\{y_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ をそれぞれ (1), (2) の数列とする。

2つのベクトル $\overrightarrow{a_n}=\left(16-\dfrac{1}{x_n},\ \dfrac{16}{x_n}-1\right)$, $\overrightarrow{b_n}=\left(\dfrac{x_n}{4},\ \dfrac{1}{y_n}\right)$ が垂直であるときの正の整数 n の値を求めよ。

(1) $x_{n+1}-x_n=2^n$ であるから, $n\geqq 2$ のとき

$$x_n=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-1$$

初項は $x_1=1$ なので, この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$x_n=2^n-1$

(2) $\dfrac{1}{y_{n+1}}=\dfrac{4}{y_n}+\dfrac{3}{4}$ を変形すると　$\dfrac{1}{y_{n+1}}+\dfrac{1}{4}=4\left(\dfrac{1}{y_n}+\dfrac{1}{4}\right)$

よって, 数列 $\left\{\dfrac{1}{y_n}+\dfrac{1}{4}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}=1$, 公比 4 の等比数列であるから

$$\frac{1}{y_n}+\frac{1}{4}=1\cdot 4^{n-1}$$

ゆえに　$\dfrac{1}{y_n}=4^{n-1}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{4^n-1}{4}$

したがって　$y_n=\dfrac{4}{4^n-1}$

(3) $\overrightarrow{a_n}\perp\overrightarrow{b_n}$ であるとき　$\overrightarrow{a_n}\cdot\overrightarrow{b_n}=0$

よって　$4x_n-\dfrac{1}{4}+\dfrac{16}{x_ny_n}-\dfrac{1}{y_n}=0$

(1), (2) の結果を代入すると

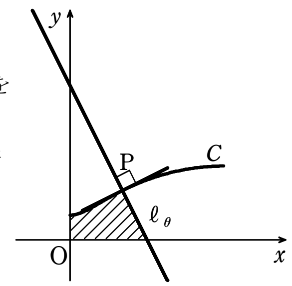
$$4(2^n-1)-\frac{1}{4}+\frac{16}{\dfrac{4(2^n-1)}{4^n-1}}-\frac{4^n-1}{4}=0$$

$$16(2^n-1)-1+16(2^n+1)-4^n+1=0$$

整理して　$32\times 2^n-4^n=0$

$2^n>0$ であるから　$2^n=32$　　ゆえに　$n=5$

$\boxed{5}$ [2006 金沢大]



xy 平面上に媒介変数 t で表された曲線 C : $x=2t-\sin t$, $y=2-\cos t$ がある。$t=\theta$ $(0<\theta<\pi)$ のときの点 $\mathrm{P}(2\theta-\sin\theta,\ 2-\cos\theta)$ における C の法線を ℓ_θ とする。ℓ_θ と x 軸と y 軸で囲まれた三角形の面積を $S(\theta)$ とし, その三角形と曲線 C の下側にある部分との共通部分 (図の斜線部分) の面積を $T(\theta)$ とする。

(1) 直線 ℓ_θ の方程式を求めよ。

(2) $S(\theta)$ を求めよ。　(3) $T(\theta)$ を求めよ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{T(\theta)}{S(\theta)}$ を求めよ。

(1) $\dfrac{dx}{dt}=2-\cos t$, $\dfrac{dy}{dt}=\sin t$　　よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{\sin t}{2-\cos t}$

$0<\theta<\pi$ のとき $\sin\theta\neq 0$ であるから, 法線 ℓ_θ の方程式は

$$y=-\frac{2-\cos\theta}{\sin\theta}\{x-(2\theta-\sin\theta)\}+2-\cos\theta$$

すなわち　$(2-\cos\theta)x+(\sin\theta)y+2\theta(\cos\theta-2)=0$　$\cdots\cdots$ ①

(2) ① において, $x=0$ とすると, $\sin\theta\neq 0$ であるから　$y=\dfrac{2\theta(2-\cos\theta)}{\sin\theta}$

① において, $y=0$ とすると, $\cos\theta\neq 2$ から　$x=2\theta$

よって　$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\cdot 2\theta\cdot\dfrac{2\theta(2-\cos\theta)}{\sin\theta}=\dfrac{2\theta^2(2-\cos\theta)}{\sin\theta}$

(3)
$$\begin{aligned}T(\theta)&=\int_0^{2\theta-\sin\theta}y\,dx+\frac{1}{2}\cdot\{2\theta-(2\theta-\sin\theta)\}(2-\cos\theta)\\&=\int_0^{\theta}(2-\cos t)\cdot(2-\cos t)dt+\frac{1}{2}\sin\theta(2-\cos\theta)\\&=\int_0^{\theta}\left(4-4\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt+\frac{1}{2}\sin\theta(2-\cos\theta)\\&=\left[\frac{9}{2}t-4\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\theta}+\frac{1}{2}\sin\theta(2-\cos\theta)\\&=\frac{9}{2}\theta-4\sin\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta+\sin\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{2}\theta-3\sin\theta\end{aligned}$$

(4) (2), (3) から

$$\frac{T(\theta)}{S(\theta)}=\frac{3(3\theta-2\sin\theta)}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{2\theta^2(2-\cos\theta)}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2-\cos\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\left(3-\frac{2\sin\theta}{\theta}\right)$$

よって　$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{T(\theta)}{S(\theta)}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2-1}\cdot 1\cdot(3-2\cdot 1)=\frac{3}{4}$

金沢大学入試問題2006，2005

$\boxed{6}$［2006 金沢大］

定数 a，b，c に対し，行列 $A=\begin{pmatrix} a & 2 \\ -1 & b \end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -2c \end{pmatrix}$ が等式

$AX=XD$ を満たしている。

(1) a，b，c の値を求めよ。　　(2) 正の整数 n に対し，A^n を求めよ。

(3) (2) の A^n に対し，$A^n=\begin{pmatrix} s_n & t_n \\ u_n & w_n \end{pmatrix}$，$x_n=s_n-u_n$，$y_n=t_n-w_n$ とおく。xy 平面上の点 P_n，Q_n を $\mathrm{P}_n(x_n,\ x_n)$，$\mathrm{Q}_n(x_{n+1},\ y_{n+1})$ と定める。3 つの直線 OP_n，OQ_n，$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を V_n とする。このとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ の和を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} a & 2 \\ -1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -2c \end{pmatrix}$ から　$\begin{pmatrix} 2a+2 & a+2 \\ -2+b & -1+b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2c & -2c \\ c & -2c \end{pmatrix}$

よって　$2a+2=2c$，$a+2=-2c$，$-2+b=c$，$-1+b=-2c$

これを解いて　$a=-\dfrac{4}{3}$，$b=\dfrac{5}{3}$，$c=-\dfrac{1}{3}$

(2) $X^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ であるから，$A=XDX^{-1}$ であり

$$A^n=(XDX^{-1})(XDX^{-1})\cdots\cdots(XDX^{-1})=XDEDE\cdots\cdots EDX^{-1}$$
$$=XD^nX^{-1}$$

ここで，$D^n=\begin{pmatrix} c^n & 0 \\ 0 & (-2c)^n \end{pmatrix}$ であるから

$$A^n=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c^n & 0 \\ 0 & (-2c)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=c^n\begin{pmatrix} 2 & (-2)^n \\ 1 & (-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$=c^n\begin{pmatrix} 2-(-2)^n & -2+2(-2)^n \\ 1-(-2)^n & -1+2(-2)^n \end{pmatrix}=\left(-\frac{1}{3}\right)^n\begin{pmatrix} 2-(-2)^n & -2+2(-2)^n \\ 1-(-2)^n & -1+2(-2)^n \end{pmatrix}$$

(3) (2) から　$x_n=c^n$，$y_n=-c^n$

ゆえに　$\mathrm{P}_n(c^n,\ c^n)$，$\mathrm{Q}_n(c^{n+1},\ -c^{n+1})$

ここで　$\mathrm{Q}_n\left(-\dfrac{1}{3}c^n,\ \dfrac{1}{3}c^n\right)$

よって，直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ と y 軸との交点を R_n とすると

$$\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n:\mathrm{R}_n\mathrm{Q}_n=1:\frac{1}{3}=3:1$$

ゆえに　$\mathrm{R}_n\left(0,\ \dfrac{1}{2}c^n\right)$

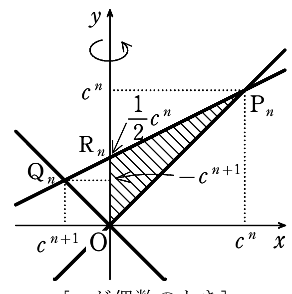
更に，$\angle\mathrm{P}_n\mathrm{OR}_n=\angle\mathrm{Q}_n\mathrm{OR}_n=45°$ であるから，

右の図より n が偶数のときも奇数のときも

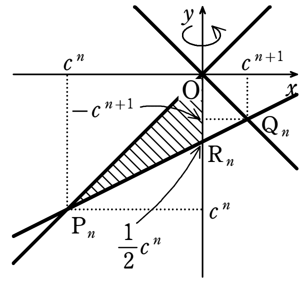
$$V_n=\frac{1}{3}\pi|c^n|^2\times|c^n|-\frac{1}{3}\pi|c^n|^2\times\frac{1}{2}|c^n|$$
$$=\frac{1}{6}\pi|c^n|^3$$
$$=\frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{27}\right)^n$$

したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty}V_n=\frac{\dfrac{\pi}{6}\cdot\dfrac{1}{27}}{1-\dfrac{1}{27}}=\frac{\pi}{156}$$



［n が偶数のとき］



［n が奇数のとき］

$\boxed{7}$［2005 金沢大］

3 点 A(6, 0, 0)，B(0, 6, 0)，C(0, 0, 6) の定める平面を α とする。原点 O を通り平面 α に直交する直線と α との交点を H とする。また，線分 HO 上の点で，H からの距離が t となる点を P_t とする。ただし，P_t の動く範囲から両端点 H，O は除くとする。

(1) 点 H の座標と，t の動く範囲を求めよ。

(2) 平面 α 上にあり，P_t からの距離が OH となる点が作る円を S_t とする。S_t とその内部を底面とし，P_t を頂点とする円錐の体積を $f(t)$ とする。このとき $f(t)$ を求めよ。

(3) (2) の $f(t)$ の最大値を求めよ。

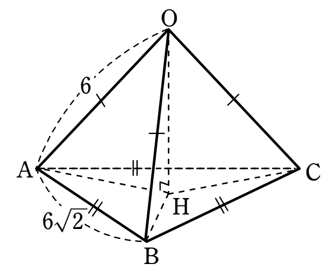
(1) $\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=6\sqrt{2}$，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=6$

△OAH，△OBH，△OCH はいずれも直角三角形であるから　$\mathrm{AH}^2=\mathrm{BH}^2=\mathrm{CH}^2=6^2-\mathrm{OH}^2$

よって　$\mathrm{AH}=\mathrm{BH}=\mathrm{CH}$

したがって，H は △ABC の外心である。

△ABC は正三角形であるから，外心と重心が一致する。



よって，点 H の座標は

$$\left(\frac{6+0+0}{3},\ \frac{0+6+0}{3},\ \frac{0+0+6}{3}\right)$$

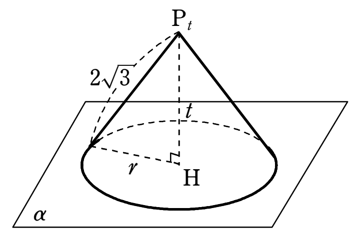
すなわち　(2, 2, 2)

このとき，$\mathrm{OH}=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$ であるから　$0<t<2\sqrt{3}$　……①

(2) 円 S_t の半径を r とすると

$$r^2=(2\sqrt{3})^2-t^2=12-t^2$$

よって　$f(t)=\dfrac{1}{3}\pi r^2t=\dfrac{1}{3}\pi(12-t^2)t$



(3) $f(t)=\pi\left(4t-\dfrac{1}{3}t^3\right)$ から　$f'(t)=\pi(4-t^2)$

① において $f'(t)=0$ とすると　$t=2$

① における $f(t)$ の増減表は，次のようになる。

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{3}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{16}{3}\pi$	$\searrow$	

よって　$t=2$ のとき最大値 $\dfrac{16}{3}\pi$

$\boxed{8}$［2005 金沢大］

不等式 $y \leqq -(x-1)^2$ の表す領域を A_1，不等式 $y \leqq -(x+1)^2$ の表す領域を A_2 とする。A_1 と A_2 の和集合 $A_1 \cup A_2$ を A とする。また，不等式 $y \geqq (x-a)^2+b$ の表す領域を B とする。

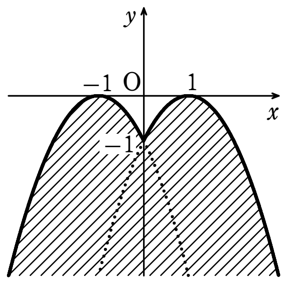
(1)　$a=0$，$b=-1$ とするとき，A と B の共通部分 $A \cap B$ の面積を求めよ。

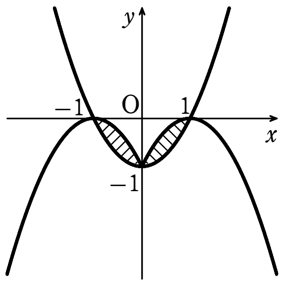
(2)　A_1 と B の共通部分 $A_1 \cap B$ が空集合でないための条件を a，b で表せ。

(3)　A と B の共通部分 $A \cap B$ が空集合でないとき，点 $(a,\ b)$ の存在範囲を座標平面に図示せよ。

(1)　A は下の左図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。

$a=0$，$b=-1$ のとき，B を表す不等式は $y \geqq x^2-1$ であるから，$A \cap B$ は下の右図の斜線部分のようになる。





$A \cap B$ は y 軸に関して対称であるから，求める面積を S とすると

$$S=2\int_0^1\{-(x-1)^2-(x^2-1)\}dx=-4\int_0^1 x(x-1)dx=\frac{4}{6}(1-0)^3=\frac{2}{3}$$

(2)　$A_1 \cap B$ が空集合でないための条件は，2 つの放物線 $y=-(x-1)^2$，$y=(x-a)^2+b$ が共有点をもつことである。

$-(x-1)^2=(x-a)^2+b$ とすると　$2x^2-2(a+1)x+a^2+b+1=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると，求める条件は

$$\frac{D}{4}=(a+1)^2-2(a^2+b+1) \geqq 0$$

すなわち　$b \leqq -\dfrac{1}{2}(a-1)^2$　…… ①

(3)　$A \cap B$ が空集合でないための条件は，$A_1 \cap B$ と $A_2 \cap B$ のうち，少なくとも 1 つが空集合でないことである。

(2) と同様に考えて，$A_2 \cap B$ が空集合でないための条件は

$$(a-1)^2-2(a^2+b+1) \geqq 0$$

すなわち　$b \leqq -\dfrac{1}{2}(a+1)^2$　…… ②

よって，点 $(a,\ b)$ の存在範囲は ① または ② の表す領域で，右の図の斜線部分のようになる。

ただし，境界線を含む。