金沢大学入試問題2007

$\boxed{1}$［2007 金沢大］

関数 $f(x)=-x^3+3ax-2b$ に対して，$f(x)=0$ が 2 重解または 3 重解をもつならば，$a^3=b^2$ となることを示せ。ただし，$a\geqq 0$ とする。

$f(x)=0$ の 2 重解を α とし，もう 1 つの解を β とすると，解と係数の関係により

$$\begin{cases}\alpha+\alpha+\beta=0\\ \alpha\cdot\alpha+\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\alpha=-3a\\ \alpha\cdot\alpha\cdot\beta=-2b\end{cases}\quad \text{すなわち}\quad \begin{cases}\beta=-2\alpha & \cdots\cdots ①\\ \alpha^2+2\alpha\beta=-3a & \cdots\cdots ②\\ \alpha^2\beta=-2b & \cdots\cdots ③\end{cases}$$

① を ②，③ に代入して　　$-3\alpha^2=-3a$，$-2\alpha^3=-2b$

すなわち　　$a=\alpha^2$，$b=\alpha^3$

したがって　　$a^3=b^2$

これは $f(x)=0$ が 3 重解をもつとき ($\alpha=\beta$ のとき) も成り立つ。

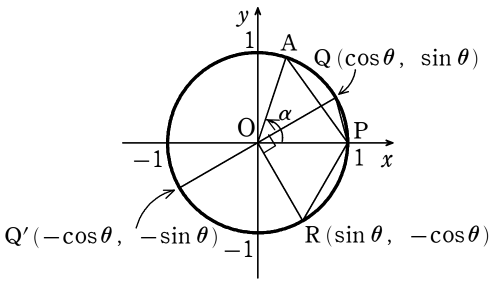
$\boxed{2}$［2007 金沢大］

点 O を原点とする xy 平面上に，3 点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{R}(\sin\theta,\ -\cos\theta)$ をとる。角 θ は $15^\circ\leqq\theta\leqq 45^\circ$ の範囲にあるとし，$\triangle\mathrm{OPQ}$ と $\triangle\mathrm{OPR}$ の面積をそれぞれ S と T とする。

(1)　$\theta<\alpha<\theta+90^\circ$ を満たす角 α に対して点 $\mathrm{A}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ をとる。$\triangle\mathrm{OPA}$ の面積と線分 QR の長さの積が $S+T$ に等しくなるとき，α を θ を用いて表せ。

(2)　θ が $15^\circ\leqq\theta\leqq 45^\circ$ を満たしながら変化するとき，$T-S$ のとりうる値の範囲を求め，$T-S$ が最大値をとるときの θ の値を求めよ。

(3)　θ を (2) で求めた値とする。このとき S と T の値を求めよ。また，点 $\mathrm{Q}'(-\cos\theta,\ -\sin\theta)$ に対して，$\triangle\mathrm{PQQ}'$ の面積を求めよ。



(1)　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\theta=\dfrac{1}{2}\sin\theta$

$T=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot|-\cos\theta|=\dfrac{1}{2}\cos\theta$

S と同様に　　$\triangle\mathrm{OPA}=\dfrac{1}{2}\sin\alpha$

(OQ の傾き)×(OR の傾き)

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{-\cos\theta}{\sin\theta}=-1$$

であるから　　$\mathrm{OQ}\perp\mathrm{OR}$

これと $\mathrm{OQ}=\mathrm{OR}=1$ から　　$\mathrm{QR}=\sqrt{2}$

$\triangle\mathrm{OPA}\times\mathrm{QR}=S+T$ より　　$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha=\dfrac{1}{2}(\sin\theta+\cos\theta)$

すなわち　　$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(\theta+45^\circ)$　……①

よって　　$\alpha=\theta+45^\circ$　または　$180^\circ-(\theta+45^\circ)$

$\alpha=\theta+45^\circ$ は $\theta<\alpha<\theta+90^\circ$ を満たす。

$\alpha=180^\circ-(\theta+45^\circ)=135^\circ-\theta$ が $\theta<\alpha<\theta+90^\circ$ を満たすとき

$$\theta<135^\circ-\theta<\theta+90^\circ$$

これを解くと　　$22.5^\circ<\theta<67.5^\circ$

したがって　　$15^\circ\leqq\theta\leqq 22.5^\circ$ のとき　$\alpha=\theta+45^\circ$

$22.5^\circ<\theta\leqq 45^\circ$ のとき　$\alpha=\theta+45^\circ$，$135^\circ-\theta$

(2)　(1) より　　$T-S=\dfrac{1}{2}(\cos\theta-\sin\theta)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(\theta+135^\circ)$　……②

$15^\circ\leqq\theta\leqq 45^\circ$ より $150^\circ\leqq\theta+135^\circ\leqq 180^\circ$ であるから

$$0\leqq T-S\leqq\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$T-S$ が最大値をとるのは，$\theta+135^\circ=150^\circ$ すなわち $\theta=15^\circ$ のときである。

(3)　$\theta=15^\circ$ のとき，①，② から

$$S+T=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{6}}{4},\quad T-S=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 150^\circ=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

これを解いて　　$S=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$，$T=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$

Q' は点 O に関して Q と対称であるから

$$\triangle\mathrm{PQQ}'=2\triangle\mathrm{OPQ}=2S=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

別解　加法定理により

$$\sin 15^\circ=\sin(60^\circ-45^\circ)=\sin 60^\circ\cos 45^\circ-\cos 60^\circ\sin 45^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$
$$\cos 15^\circ=\cos(60^\circ-45^\circ)=\cos 60^\circ\cos 45^\circ+\sin 60^\circ\sin 45^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

これらの値を (1) の S，T の式に用いても，S，T の値は求められる。

金沢大学入試問題2007

$\boxed{3}$［2007 金沢大］

関数 $f(x)=-x^2+6x+2|x-3|-6$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax$ が 4 点を共有するような a の値の範囲を求めよ。

(3)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=\dfrac{3}{5}x$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

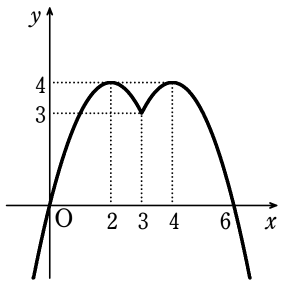
(1)　$x\geqq 3$ のとき

$$f(x)=-x^2+6x+2(x-3)-6$$
$$=-x^2+8x-12=-(x-4)^2+4$$

$x<3$ のとき

$$f(x)=-x^2+6x-2(x-3)-6$$
$$=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$$

よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。



(2)　直線 $y=ax$ が点 $(3,\ 3)$ を通るとき

$3=a\cdot 3$　　　　よって　　$a=1$

直線 $y=ax$ が $y=-x^2+8x-12$ のグラフと $x\geqq 3$ で接するとき，

$ax=-x^2+8x-12$ すなわち $x^2+(a-8)x+12=0$ が重解をもつ。

判別式を D とすると　　$D=(a-8)^2-4\cdot 1\cdot 12=0$

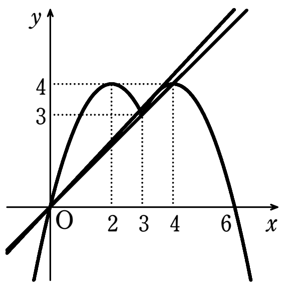
よって　　$a-8=\pm 4\sqrt{3}$　　　ゆえに　　$a=8\pm 4\sqrt{3}$

このうち，接点の x 座標が $x\geqq 3$ の範囲にあるのは

$a=8-4\sqrt{3}$ のときである。

右の図から，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax$ が 4 点を共有するような a の値の範囲は

$$1<a<8-4\sqrt{3}$$



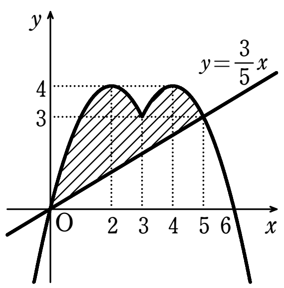
(3)　直線 $y=\dfrac{3}{5}x$ と $y=-x^2+8x-12$ のグラフの $x\geqq 3$ における共有点の x 座標は $\dfrac{3}{5}x=-x^2+8x-12$ $(x\geqq 3)$ の解である。

ゆえに　　$5x^2-37x+60=0$

すなわち　　$(x-5)(5x-12)=0$

$x\geqq 3$ であるから　　$x=5$　　　このとき　　$y=3$

よって，求める面積を S とすると



$$S=\int_0^3(-x^2+4x)dx+\int_3^5(-x^2+8x-12)dx-\frac{1}{2}\times 5\times 3$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_0^3+\left[-\frac{x^3}{3}+4x^2-12x\right]_3^5-\frac{15}{2}$$
$$=-9+18+\left(-\frac{125}{3}+100-60\right)-(-9+36-36)-\frac{15}{2}=\frac{53}{6}$$

$\boxed{4}$［2007 金沢大］

1 つの袋に 5 個の玉が入っており，それぞれに 0，1，2，3，4 の数字が書かれている。この袋から玉を 1 つ取り出し，もとに戻すという試行を繰り返していき，取り出した玉に書かれた数字と直前の試行で取り出した玉の数字との和が 4 となったとき終了する。$n\geqq 2$ とする。n 回以下の試行で終了したときは，最後に取り出した玉に書かれた数字を得点とし，n 回の試行では終了しない場合の得点は 0 とする。このようにして定まる得点の期待値を E_n とする。

(1)　$2\leqq k\leqq n$ とする。ちょうど k 回目の試行で終了する確率を P_k とするとき，P_2，P_3，P_4 を求めよ。また，P_k を k を用いて表せ。

(2)　E_2，E_3 を求めよ。また，E_n を n を用いて表せ。

(3)　極限値 $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}E_n$ を求め，更に $E_n\geqq \alpha-\dfrac{1}{100}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

(1)　1 回目はどの数字が出ても終了しないから，終了しない確率は　1

2 回目以降の試行では，直前の試行でどの数字が出ていても

終了する確率は $\dfrac{1}{5}$，　終了しない確率は $\dfrac{4}{5}$

よって　　$P_2=1\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{5}$，　$P_3=1\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{25}$，　$P_4=1\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{16}{125}$，

$$P_k=1\times\underbrace{\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\cdots\cdots\times\frac{4}{5}}_{k-2\text{ 個の積}}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2}$$

(2)　玉の取り出し方は同様に確からしいから，k 回目の得点が 0，1，2，3，4 となる確率はそれぞれ $\dfrac{1}{5}P_k$ である。

$$E_2=\frac{1}{5}P_2(0+1+2+3+4)=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$$
$$E_3=E_2+\frac{1}{5}P_3(0+1+2+3+4)=\frac{2}{5}+\frac{8}{25}=\frac{18}{25}$$

以上から　　$E_n=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{5}P_k(0+1+2+3+4)=\frac{2}{5}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2}$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}}{1-\frac{4}{5}}=2\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}$$

(3)　$\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}E_n=\lim\limits_{n\to\infty}2\left\{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}=2$

よって，$2\left\{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}\geqq 2-\dfrac{1}{100}$ から　　$\left(\dfrac{8}{10}\right)^{n-1}\leqq\dfrac{1}{200}$

両辺の常用対数をとると　　$\log_{10}\left(\dfrac{8}{10}\right)^{n-1}\leqq\log_{10}\dfrac{1}{200}$

整理して　　$(n-1)(3\log_{10}2-1)\leqq -2-\log_{10}2$

$3\log_{10}2-1<0$ であるから

$$n-1\geqq\frac{2+\log_{10}2}{1-3\log_{10}2}=\frac{2.3010}{0.0970}=23.7\cdots\cdots$$

ゆえに　　$n\geqq 24.7\cdots\cdots$

したがって，求める n の値は　　$n=25$

金沢大学入試問題2007

$\boxed{5}$ [2007 金沢大]

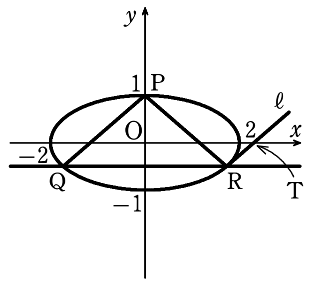
$-1<t<1$ を満たす t に対して，xy 平面上の直線 $y=t$ と楕円 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ の交点を Q$(-s,\ t)$，R$(s,\ t)$ $(s>0)$ とする。点 P$(0,\ 1)$ に対して，△PQR の面積を $S(t)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $S(t)$ を求めよ。また，$-1<t<1$ における $S(t)$ の最大値とそのときの点 R の座標を求めよ。

(2) (1) で求めた点 R における楕円 C の接線 ℓ と x 軸との交点を T とするとき，$\cos\angle\mathrm{PRT}$ の値を求めよ。

(3) 楕円 C で囲まれる図形は直線 PR によって 2 つの部分に分割される。このうち原点が属さない方の面積を，(1) で求めた点 R に対して求めよ。

(1) $\dfrac{s^2}{4}+t^2=1$，$s>0$ から　　$s=2\sqrt{1-t^2}$



よって　$S(t)=\dfrac{1}{2}\times 2s\times(1-t)=2(1-t)\sqrt{1-t^2}$

$=2\sqrt{(1-t)^3(1+t)}$

$f(t)=(1-t)^3(1+t)$ とおくと

$f'(t)=-3(1-t)^2(1+t)+(1-t)^3$

$=-2(2t+1)(t-1)^2$

$-1<t<1$ における $f(t)$ の増減表は右のようになる。

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$	／	$+$	0	$-$	／
$f(t)$	／	↗	極大	↘	／

よって，$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき $f(t)$ は最大となり，

$S(t)$ も最大となる。

最大値は $S\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2\times\dfrac{3}{2}\sqrt{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ となる。このとき $s=\sqrt{3}$ であるから，

R の座標は $\left(\sqrt{3},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ となる。

(2) ℓ の方程式は　$\dfrac{\sqrt{3}\,x}{4}-\dfrac{1}{2}y=1$　すなわち　$\sqrt{3}\,x-2y-4=0$

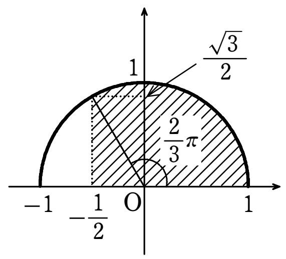
よって，ℓ の方向ベクトルは $(2,\ \sqrt{3})$ である。

また　$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\left(-\sqrt{3},\ \dfrac{3}{2}\right)$　　　よって　$\dfrac{2}{\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{RP}}=(-2,\ \sqrt{3})$

ゆえに　　$\cos\angle\mathrm{PRT}=\dfrac{2\cdot(-2)+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}\sqrt{(-2)^2+(\sqrt{3})^2}}=\dfrac{-4+3}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}=-\dfrac{1}{7}$

(3) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ から，$x\geqq 0$ のとき　$x=2\sqrt{1-y^2}$

よって，求める面積は



$\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{1}2\sqrt{1-y^2}\,dy-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)$

$\displaystyle=2\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$\displaystyle=2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{2}{3}\pi\right)-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$\displaystyle=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{2}{3}\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{6}$ [2007 金沢大]

(1) xy 平面上の直線 $\ell:y=mx+\dfrac{1}{3}$ が曲線 $C:y=x^{\frac{2}{3}}$ $(x\geqq 0)$ に接するとき，直線 ℓ の傾き m の値と接点の座標を求めよ。

(2) (1) で求めた m の値に対する直線 ℓ，曲線 C および y 軸で囲まれた部分を，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

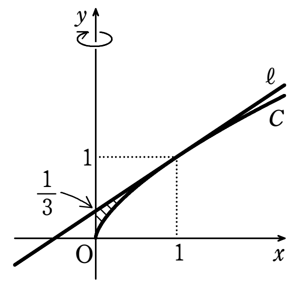
(1) $y=x^{\frac{2}{3}}$ から　　$y'=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

接点の座標を $\left(t,\ t^{\frac{2}{3}}\right)$ $(t\geqq 0)$ とすると　　$\dfrac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}=m$ かつ $mt+\dfrac{1}{3}=t^{\frac{2}{3}}$

m を消去すると　$\dfrac{2}{3}t^{\frac{2}{3}}+\dfrac{1}{3}=t^{\frac{2}{3}}$　　　よって　$t^{\frac{2}{3}}=1$　　　$t\geqq 0$ であるから　$t=1$

ゆえに　$m=\dfrac{2}{3}$　　　接点の座標は　$(1,\ 1)$

(2) $m=\dfrac{2}{3}$ のとき，直線 ℓ，曲線 C および y 軸で囲まれた部分は右の図の斜線部分である。



また，$y=x^{\frac{2}{3}}$ から　　$x^2=y^3$

よって，求める体積は

$\displaystyle\pi\int_0^1 x^2dy-\frac{1}{3}\pi\times 1^2\times\left(1-\frac{1}{3}\right)$

$\displaystyle=\pi\int_0^1 y^3dy-\frac{2}{9}\pi=\pi\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1-\frac{2}{9}\pi$

$\displaystyle=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{9}\pi=\frac{\pi}{36}$

金沢大学入試問題2007

$\boxed{7}$［2007 金沢大］

A を2次の正方行列とし，a と b はどちらも0でない実数とする。零ベクトルではない2つのベクトル $\vec{u}=(x,\ y)$，$\vec{v}=(z,\ w)$ に対して，

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}=b\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$

が成り立つとする。$X=\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $xw=yz$ ならば，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ は平行であることを示せ。
(2) X が逆行列をもたなければ，$a=b$ であることを示せ。
(3) a と b が異なるならば，A は逆行列をもつことを示せ。

(1) [1] $xw=yz\neq 0$ のとき　$\dfrac{x}{z}=\dfrac{y}{w}$

よって，$x=kz$，$y=kw$ (k は0でない実数) と表されるから　$\vec{u}=k\vec{v}$

ゆえに　$\vec{u}/\!/\vec{v}$

[2] $xw=yz=0$ のとき，$x=w=0$ とすると，$\vec{u}\neq\vec{0}$，$\vec{v}\neq\vec{0}$ より $y\neq 0$，$z\neq 0$ となるが，これは $yz=0$ に反する。よって，$x=w=0$ となることはない。

(i) $x=0$，$w\neq 0$ の場合，$\vec{u}\neq\vec{0}$ より $y\neq 0$ であるから　$z=0$

よって　$\vec{u}=(0,\ y)$，$\vec{v}=(0,\ w)$　ゆえに　$\vec{u}/\!/\vec{v}$

(ii) $x\neq 0$，$w=0$ の場合，$\vec{v}\neq\vec{0}$ より $z\neq 0$ であるから　$y=0$

よって　$\vec{u}=(x,\ 0)$，$\vec{v}=(z,\ 0)$　ゆえに　$\vec{u}/\!/\vec{v}$

[1]，[2] から　$\vec{u}/\!/\vec{v}$

(2) X が逆行列をもたないとき　$xw-yz=0$　よって，(1) から　$\vec{u}/\!/\vec{v}$

ゆえに，$\vec{v}=k\vec{u}$ (k は0でない実数) とおける。

$A\vec{u}=a\vec{u}$ であるから　$A\vec{v}=kA\vec{u}=ka\vec{u}=ak\vec{u}=a\vec{v}$

また，$A\vec{v}=b\vec{v}$ であるから　$(a-b)\vec{v}=\vec{0}$　$\vec{v}\neq\vec{0}$ であるから　$a=b$

(3) (2) の対偶により，$a\neq b$ のとき逆行列 X^{-1} は存在する。

よって　$xw-yz\neq 0$　……①

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}=b\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ から　$A\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax & bz \\ ay & bw \end{pmatrix}$

ゆえに　$AX=\begin{pmatrix} ax & bz \\ ay & bw \end{pmatrix}$

ここで　$\Delta(AX)=ax\cdot bw-bz\cdot ay=ab(xw-yz)$

$a\neq 0$，$b\neq 0$，および①から　$\Delta(AX)\neq 0$

$\Delta(AX)=\Delta(A)\Delta(X)$ であるから　$\Delta(A)\neq 0$　ゆえに，A は逆行列をもつ。