# 金沢大学入試問題2008

1 ［2008 金沢大］

$xy$ 平面において，原点 O を中心とする半径 1 の円を $C$ とする。$a$ を正の実数とし，点 A$(0,\ 1)$ を通り，傾き $a$ の直線を $\ell$ とする。$C$ と $\ell$ の交点で，A と異なるものを P とし，$\ell$ と直線 $y=-2$ の交点を Q とする。また，P における $C$ の接線を $m$ とし，$m$ と直線 $y=-2$ の交点を R とする。

(1) 直線 $m$ の方程式を $a$ を用いて表せ。

(2) $a$ が正の値をとって動くとき，線分 QR の長さの最小値と，そのときの $a$ の値を求めよ。

(3) (2) で求めた $a$ の値に対して，点 A を通り，∠QAR を 2 等分する直線の方程式を求めよ。

(1) $\ell$ : $y=ax+1$ ……①，　$C$ : $x^2+y^2=1$ ……②

①，② から $y$ を消去すると　$x^2+(ax+1)^2=1$

整理すると　$x\{(a^2+1)x+2a\}=0$　　よって　$x=0,\ -\dfrac{2a}{a^2+1}$

$x=-\dfrac{2a}{a^2+1}$ を ① に代入すると　$y=\dfrac{1-a^2}{a^2+1}$

したがって，点 P の座標は　$\left(-\dfrac{2a}{a^2+1},\ \dfrac{1-a^2}{a^2+1}\right)$

よって，接線 $m$ の方程式は　$-\dfrac{2a}{a^2+1}x+\dfrac{1-a^2}{a^2+1}y=1$

すなわち　$-2ax+(1-a^2)y=a^2+1$ ……③

(2) ① に $y=-2$ を代入して整理すると　$x=-\dfrac{3}{a}$　　よって　Q$\left(-\dfrac{3}{a},\ -2\right)$

③ に $y=-2$ を代入して整理すると　$x=\dfrac{a^2-3}{2a}$　　よって　R$\left(\dfrac{a^2-3}{2a},\ -2\right)$

$a>0$ であるから　$\mathrm{QR}=\left|\dfrac{a^2-3}{2a}-\left(-\dfrac{3}{a}\right)\right|=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{3}{a}\right)\geqq\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{a\cdot\dfrac{3}{a}}=\sqrt{3}$

等号は $a=\dfrac{3}{a}$ すなわち $a=\sqrt{3}$ のとき成り立つ。

したがって，$a=\sqrt{3}$ のとき最小値 $\sqrt{3}$ をとる。

(3) $a=\sqrt{3}$ のとき　Q$(-\sqrt{3},\ -2)$，R$(0,\ -2)$

よって　$\mathrm{AQ}=\sqrt{(-\sqrt{3}-0)^2+(-2-1)^2}=2\sqrt{3}$

$\mathrm{AR}=1-(-2)=3$

∠QAR の二等分線と線分 QR の交点を S とすると

$\mathrm{QS}:\mathrm{SR}=\mathrm{AQ}:\mathrm{AR}=2\sqrt{3}:3=2:\sqrt{3}$

$\dfrac{\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3})+2\cdot0}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{-3}{2+\sqrt{3}}$ であるから　S$\left(\dfrac{-3}{2+\sqrt{3}},\ -2\right)$

求める直線 AS の方程式は

$y-1=\dfrac{1-(-2)}{0-\dfrac{-3}{2+\sqrt{3}}}x$　　すなわち　$y=(2+\sqrt{3})x+1$

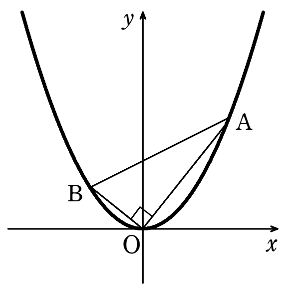
2 ［2008 金沢大］

$c$ を正の定数とし，O を原点とする座標平面上の放物線 $y=cx^2$ を $C$ とする。$C$ 上に 2 点 A$(a,\ ca^2)$ と B$(b,\ cb^2)$ がある。ただし $a>0$，$b<0$ とする。

(1) $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ であるための条件は $b=-\dfrac{1}{c^2a}$ であることを示せ。

(2) $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\mathrm{AB}\geqq\dfrac{2}{c}$ であることを示せ。

(3) A と B が $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ を満たしながら動くとき，△AOB の重心 G の軌跡を求めよ。




(1) 2 直線 OA，OB の傾きはそれぞれ $ca$，$cb$ である。

$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$ca\cdot cb=-1$

よって　$b=-\dfrac{1}{c^2a}$ ……①

(2) $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ であるから，三平方の定理により

$\mathrm{AB}=\sqrt{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2}=\sqrt{\{a^2+(ca^2)^2\}+\{b^2+(cb^2)^2\}}$

$=\sqrt{a^2+c^2a^4+\dfrac{1}{c^4a^2}+\dfrac{1}{c^6a^4}}$

相加平均・相乗平均の大小関係により　$a^2+\dfrac{1}{c^4a^2}\geqq2\sqrt{a^2\cdot\dfrac{1}{c^4a^2}}=\dfrac{2}{c^2}$

等号は $a^2=\dfrac{1}{c^4a^2}$ すなわち $a=\dfrac{1}{c}$ のとき成り立つ。

同様に　$c^2a^4+\dfrac{1}{c^6a^4}\geqq2\sqrt{c^2a^4\cdot\dfrac{1}{c^6a^4}}=\dfrac{2}{c^2}$

等号は $c^2a^4=\dfrac{1}{c^6a^4}$ すなわち $a=\dfrac{1}{c}$ のとき成り立つ。

したがって，AB は $a=\dfrac{1}{c}$ で最小値 $\sqrt{\dfrac{2}{c^2}+\dfrac{2}{c^2}}=\dfrac{2}{c}$ をとる。

すなわち　$\mathrm{AB}\geqq\dfrac{2}{c}$

(3) G$(x,\ y)$ とおくと　$x=\dfrac{a+b}{3}$，$y=\dfrac{ca^2+cb^2}{3}$

ここで　$y=\dfrac{ca^2+cb^2}{3}=\dfrac{c\{(a+b)^2-2ab\}}{3}$

$x=\dfrac{a+b}{3}$ から　$a+b=3x$　　① から　$ab=-\dfrac{1}{c^2}$

これらを $y=\dfrac{c\{(a+b)^2-2ab\}}{3}$ に代入すると　$y=\dfrac{c\left\{(3x)^2+\dfrac{2}{c^2}\right\}}{3}=3cx^2+\dfrac{2}{3c}$

よって，G の軌跡は　放物線 $y=3cx^2+\dfrac{2}{3c}$

3 ［2008 金沢大］

$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で定義された関数

$$f(\theta)=a\sin\theta\cos\theta+b(\sin\theta-\cos\theta)-1$$

を考える。ただし，$a$，$b$ は正の実数とする。

(1) $t=\sin\theta-\cos\theta$ として，$f(\theta)$ を $a$，$b$，$t$ を用いて表せ。また，$t$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 等式 $f(\theta)=0$ を満たす $\theta$ が存在するような点 $(a,\ b)$ 全体からなる領域を座標平面上に図示せよ。

(1) $t=\sin\theta-\cos\theta$ から　$t^2=1-2\sin\theta\cos\theta$

よって　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{2}$

ゆえに　$f(\theta)=a\cdot\dfrac{1-t^2}{2}+bt-1=-\dfrac{1}{2}at^2+bt+\dfrac{a}{2}-1$

また　$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ であるから　$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq1$

したがって，$t$ のとりうる値の範囲は　$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$

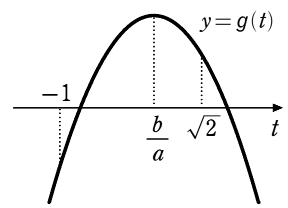
(2) $g(t)=-\dfrac{1}{2}at^2+bt+\dfrac{a}{2}-1$ とすると

$$g(t)=-\frac{1}{2}a\left(t-\frac{b}{a}\right)^2+\frac{b^2}{2a}+\frac{a}{2}-1$$

等式 $f(\theta)=0$ を満たす $\theta$ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲に存在するための条件は，$g(t)=0$ を満たす $t$ が $-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ の範囲に存在すること ……(＊) である。

$a>0$，$b>0$ から　$\dfrac{b}{a}>0$，$g(-1)=-b-1<0$

[1] $0<\dfrac{b}{a}\leqq\sqrt{2}$ すなわち $0<b\leqq\sqrt{2}\,a$ のとき

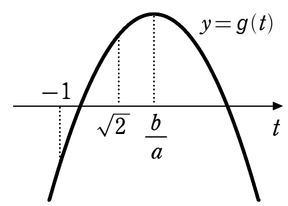



(＊)$\Longleftrightarrow$ $g\left(\dfrac{b}{a}\right)\geqq0$ であるから　$\dfrac{b^2}{2a}+\dfrac{a}{2}-1\geqq0$

分母を払って　$b^2+a^2-2a\geqq0$

よって　$(a-1)^2+b^2\geqq1$

[2] $\sqrt{2}<\dfrac{b}{a}$ すなわち $b>\sqrt{2}\,a$ のとき

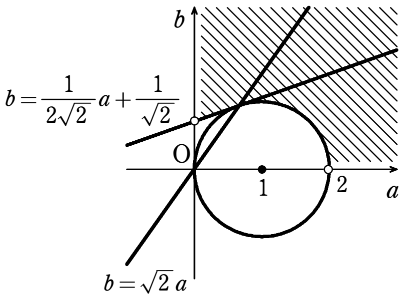



(＊)$\Longleftrightarrow$ $g(\sqrt{2})\geqq0$ であるから

$-\dfrac{1}{2}a+\sqrt{2}\,b-1\geqq0$

よって　$b\geqq\dfrac{1}{2\sqrt{2}}a+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

[1], [2] から，求める領域は右の図の斜線部分である。ただし，境界線は座標軸上を含まず，他は含む。




参考 2 直線 $b=\sqrt{2}\,a$，$b=\frac{1}{2\sqrt{2}}a+\frac{1}{\sqrt{2}}$ の交点の座標を求めると

$$\left(\frac{2}{3},\ \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

この点において，直線 $b=\frac{1}{2\sqrt{2}}a+\frac{1}{\sqrt{2}}$ は円 $(a-1)^2+b^2=1$ に接している。

$\boxed{4}$ [2008 金沢大]

実数 $a$ に対して，関数 $f(x)$，$g(x)$ を $f(x)=-(a+1)x-1$，$g(x)=2x+\frac{a}{3}$ とし，$m(a)=\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ とする。

(1) $m(a)>0$ を満たす $a$ の値の範囲を求めよ。

(2) (1) で求めた $a$ の値の範囲において，関数 $h(x)=g(x)-m(a)f(x)$ を考える。このとき，$\int_0^1 f(x)h(x)\,dx=0$ となる $a$ の値を求めよ。

(1) $m(a)=-\int_0^1\{(a+1)x+1\}\left(2x+\frac{a}{3}\right)dx$

$$=-\int_0^1\left\{2(a+1)x^2+\left(\frac{a^2}{3}+\frac{a}{3}+2\right)x+\frac{a}{3}\right\}dx$$

$$=-\left[\frac{2(a+1)}{3}x^3+\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{3}+\frac{a}{3}+2\right)x^2+\frac{a}{3}x\right]_0^1$$

$$=-\frac{1}{6}(a^2+7a+10)=-\frac{1}{6}(a+2)(a+5)$$

よって，$m(a)>0$ から　　$(a+2)(a+5)<0$

したがって　　$-5<a<-2$

(2) $\int_0^1 f(x)h(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\{g(x)-m(a)f(x)\}dx$

$$=\int_0^1 f(x)g(x)\,dx-m(a)\int_0^1\{f(x)\}^2dx$$

$$=m(a)-m(a)\int_0^1\{f(x)\}^2dx=m(a)\left[1-\int_0^1\{f(x)\}^2dx\right]$$

$m(a)>0$ であるから，$\int_0^1 f(x)h(x)\,dx=0$ のとき　　$\int_0^1\{f(x)\}^2dx=1$　…… ①

ここで　　$\int_0^1\{f(x)\}^2dx=\int_0^1\{(a+1)x+1\}^2dx=\int_0^1\{(a+1)^2x^2+2(a+1)x+1\}dx$

$$=\left[\frac{(a+1)^2}{3}x^3+(a+1)x^2+x\right]_0^1=\frac{(a+1)^2}{3}+(a+1)+1$$

よって，① から　　$\frac{(a+1)^2}{3}+(a+1)+1=1$

ゆえに　　$(a+1)^2+3(a+1)=0$

$(a+1)\{(a+1)+3\}=0$

したがって　　$(a+1)(a+4)=0$

$-5<a<-2$ であるから　　$a=-4$

$\boxed{5}$ [2008 金沢大]

$a$ を実数とする。

(1) $a\geqq 0$ のとき，$S(a)=\int_0^1|x^3-3ax^2+2a^2x|\,dx$ を求めよ。

(2) $a$ が $0\leqq a\leqq\frac{1}{2}$ の範囲を動くとき，$S(a)$ の最大値を求めよ。

(1) $f(x)=x^3-3ax^2+2a^2x$ とすると　　$f(x)=x(x-a)(x-2a)$

$F(x)=\frac{x^4}{4}-ax^3+a^2x^2$ とすると

$$F(0)=0,\quad F(1)=a^2-a+\frac{1}{4},\quad F(a)=\frac{a^4}{4},\quad F(2a)=0$$

[1] $1\leqq a$ のとき

$$S(a)=\int_0^1 f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_0^1=F(1)-F(0)=a^2-a+\frac{1}{4}$$

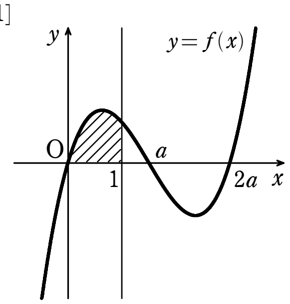
[2] $a<1<2a$ すなわち $\frac{1}{2}<a<1$ のとき

$$S(a)=\int_0^a f(x)\,dx+\int_a^1\{-f(x)\}dx=\Big[F(x)\Big]_0^a-\Big[F(x)\Big]_a^1$$

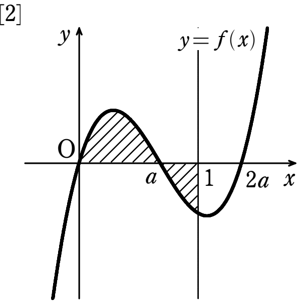
$$=2F(a)-F(0)-F(1)=2\cdot\frac{a^4}{4}-0-\left(a^2-a+\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{a^4}{2}-a^2+a-\frac{1}{4}$$

[1]




[2]




[3] $0<2a\leqq 1$ すなわち $0<a\leqq\frac{1}{2}$ のとき

$$S(a)=\int_0^a f(x)\,dx+\int_a^{2a}\{-f(x)\}dx+\int_{2a}^1 f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_0^a-\Big[F(x)\Big]_a^{2a}+\Big[F(x)\Big]_{2a}^1$$

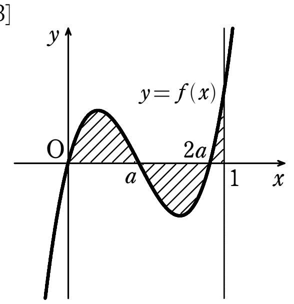
$$=2F(a)-2F(2a)-F(0)+F(1)=2\cdot\frac{a^4}{4}-2\cdot 0-0+\left(a^2-a+\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{a^4}{2}+a^2-a+\frac{1}{4}\quad\cdots\cdots ①$$

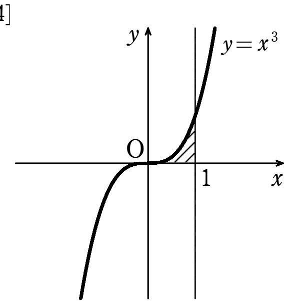
[4] $a=0$ のとき　　$S(0)=\int_0^1 x^3\,dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}$

① に $a=0$ を代入すると $\frac{1}{4}$ となるから，① は $a=0$ のときにも成り立つ。

[3]




[4]




以上をまとめて　$0 \leqq a \leqq \frac{1}{2}$ のとき　$S(a)=\frac{a^4}{2}+a^2-a+\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}<a<1$ のとき　$S(a)=\frac{a^4}{2}-a^2+a-\frac{1}{4}$

$1 \leqq a$　のとき　$S(a)=a^2-a+\frac{1}{4}$

(2)　(1) から，$0 \leqq a \leqq \frac{1}{2}$ のとき　$S(a)=\frac{a^4}{2}+a^2-a+\frac{1}{4}$，　$S'(a)=2a^3+2a-1$

$S'(a)$ を $a$ で微分すると　$S''(a)=6a^2+2>0$

よって，$S'(a)$ は単調に増加して，更に $S'(0)=-1<0$，　$S'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}>0$

であるから，$S'(a)=0$ を満たす $a$ が $0<a<\frac{1}{2}$ の範囲にただ 1 つ存在する。

それを $\alpha$ とすると，$0 \leqq a \leqq \frac{1}{2}$ における $S(a)$ の増減表は右のようになる。

| $a$ | 0 | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $\frac{1}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(a)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $S(a)$ | $\frac{1}{4}$ | ↘ | 極小 | ↗ | $\frac{1}{32}$ |

よって，$S(a)$ は $a=0$ のとき最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。

$\boxed{6}$ ［2008　金沢大］

$xyz$ 空間において，原点 O を中心とする半径 1 の球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$，および $S$ 上の点 A$(0,\ 0,\ 1)$ を考える。$S$ 上の A と異なる点 P$(x_0,\ y_0,\ z_0)$ に対して，2 点 A，P を通る直線と $xy$ 平面の交点を Q とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ ($t$ は実数) とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $t$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の成分表示を $x_0$，$y_0$，$z_0$ を用いて表せ。

(3)　球面 $S$ と平面 $y=\frac{1}{2}$ の共通部分が表す図形を $C$ とする。点 P が $C$ 上を動くとき，$xy$ 平面上における点 Q の軌跡を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ から　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=t(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OP}}$　…… ①

(2)　① から　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)(0,\ 0,\ 1)+t(x_0,\ y_0,\ z_0)=(tx_0,\ ty_0,\ 1-t+tz_0)$

Q は $xy$ 平面上の点であるから　$1-t+tz_0=0$

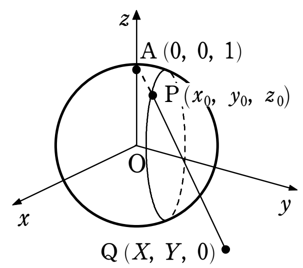
P は A と異なるから　$z_0 \neq 1$　よって　$t=\frac{1}{1-z_0}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(\frac{x_0}{1-z_0},\ \frac{y_0}{1-z_0},\ 0\right)$

(3)　点 P が $C$ 上を動くから　${x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2=1$，　$y_0=\frac{1}{2}$

よって　${x_0}^2+{z_0}^2=\frac{3}{4}$　…… ②

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(\frac{x_0}{1-z_0},\ \frac{1}{2(1-z_0)},\ 0\right)$




$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(X,\ Y,\ 0)$ とすると

$X=\frac{x_0}{1-z_0}$，$Y=\frac{1}{2(1-z_0)}$ $(\neq 0)$

よって　$x_0=\frac{X}{2Y}$，　$z_0=1-\frac{1}{2Y}$

これを ② に代入して　$\left(\frac{X}{2Y}\right)^2+\left(1-\frac{1}{2Y}\right)^2=\frac{3}{4}$

$X^2+(2Y-1)^2=3Y^2$

$X^2+Y^2-4Y+1=0$

$X^2+(Y-2)^2=3$

したがって，点 Q の軌跡は点 $(0,\ 2,\ 0)$ を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円である。

$\boxed{7}$ ［2008　金沢大］

(1)　$a$ を定数とし，正の数からなる数列 $\{x_n\}$ は $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{x_n+n}-\sqrt{n})=a$ を満たすとする。

このとき，$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}=2a$ が成り立つことを示せ。

(2)　自然数 $L$，$n$ に対して

$$\sqrt{L+n+1}-\sqrt{n+1}<\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{k+n}}<\sqrt{L+n}-\sqrt{n}$$

が成り立つことを示せ。

(3)　$b$ は定数で，$b>1$ とする。自然数 $n$ に対して，集合

$$\left\{L \;\middle|\; L \text{ は } \sum_{k=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{k+n}}<b \text{ を満たす自然数}\right\}$$

の要素の個数を $L_n$ とする。このとき，$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{\sqrt{n}}=b$ が成り立つことを示せ。

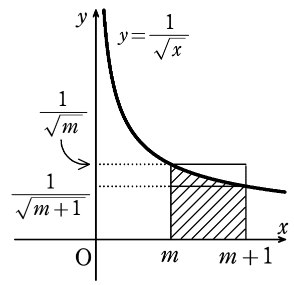
(1)　$y_n=\sqrt{x_n+n}-\sqrt{n}$　$(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ とおくと，条件から　$\lim_{n\to\infty}y_n=a$

$\sqrt{x_n+n}=y_n+\sqrt{n}$ の両辺を 2 乗して

$x_n+n=(y_n+\sqrt{n})^2$　すなわち　$x_n={y_n}^2+2\sqrt{n}\,y_n$

よって　$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{{y_n}^2}{\sqrt{n}}+2y_n\right)=2a$

(2)　曲線 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ と $x$ 軸，直線 $x=m$，$x=m+1$ ($m$ は自然数) で囲まれた部分の面積を考えると




$$\frac{1}{\sqrt{m+1}}<\int_m^{m+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx<\frac{1}{\sqrt{m}}$$

$$\int_m^{m+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\Big[2\sqrt{x}\Big]_m^{m+1}=2(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})$$

であるから

$$\frac{1}{\sqrt{m+1}}<2(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})<\frac{1}{\sqrt{m}}\quad\cdots\cdots\ ①$$

① の左側の不等式は $m=0$ のときも成り立つから

$$\frac{1}{\sqrt{m}}<2(\sqrt{m}-\sqrt{m-1})$$

よって，① から　$2(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})<\frac{1}{\sqrt{m}}<2(\sqrt{m}-\sqrt{m-1})$

すなわち　$\sqrt{m+1}-\sqrt{m}<\frac{1}{2\sqrt{m}}<\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$

ゆえに　$\sum_{m=1+n}^{L+n}(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})<\sum_{m=1+n}^{L+n}\frac{1}{2\sqrt{m}}<\sum_{m=1+n}^{L+n}(\sqrt{m}-\sqrt{m-1})$

よって　$\sqrt{L+n+1}-\sqrt{1+n}<\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{k+n}}<\sqrt{L+n}-\sqrt{n}$

(3)　条件を $L_n$ を用いて表すと　$\sum_{k=1}^{L_n}\frac{1}{\sqrt{k+n}}<b \leqq \sum_{k=1}^{L_n+1}\frac{1}{\sqrt{k+n}}$

この不等式と (2) から

$$\sqrt{L_n+n+1}-\sqrt{n+1}<\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L_n}\frac{1}{\sqrt{k+n}}<\frac{b}{2}\quad\cdots\cdots\ ②$$

$$\frac{b}{2} \leqq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L_n+1}\frac{1}{\sqrt{k+n}} < \sqrt{L_n+n+1}-\sqrt{n} \quad \cdots\cdots ③$$

② から　$\sqrt{L_n+n+1}-\sqrt{n+1}<\frac{b}{2}$

ゆえに　$\sqrt{L_n+n+1}-\sqrt{n}<\frac{b}{2}+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$　……④

③ から　$\frac{b}{2}<\sqrt{L_n+n+1}-\sqrt{n}$　……⑤

④，⑤ から　$\frac{b}{2}<\sqrt{L_n+1+n}-\sqrt{n}<\frac{b}{2}+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

ここで $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$ であるから

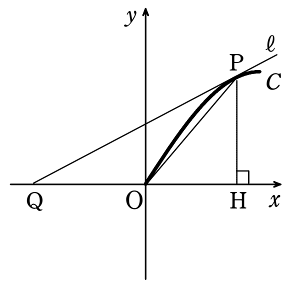
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{L_n+1+n}-\sqrt{n})=\frac{b}{2}$$

よって，(1) から　$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n+1}{\sqrt{n}}=2\cdot\frac{b}{2}=b$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_n+1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=b-0=b$

$\boxed{8}$［2008 金沢大］

O を原点とする座標平面上の曲線 $y=\sin\frac{x}{2}$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ を $C$ とする。点 $\mathrm{P}\left(t,\ \sin\frac{t}{2}\right)$ $(0<t<\pi)$ における $C$ の接線を $\ell$ とし，$\ell$ と $x$ 軸との交点を Q とする。また点 P から $x$ 軸に下ろした垂線を PH とする (右図参照)。曲線 $C$ と $x$ 軸および線分 PH で囲まれた図形を $x$ 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を $V_0(t)$ とする。また △POH，△PQH を $x$ 軸の周りに 1 回転させてできる円錐の体積を，それぞれ $V_1(t)$，$V_2(t)$ とする。




(1)　$V_0(t)$，$V_1(t)$，$V_2(t)$ を求めよ。

(2)　不等式 $V_1(t)<V_0(t)<V_2(t)$ を用いて，$\lim_{t\to+0}\frac{t-\sin t}{t^3}$ を求めよ。

(1)　$V_0(t)=\pi\int_0^t\sin^2\frac{x}{2}\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^t(1-\cos x)dx=\frac{\pi}{2}\Big[x-\sin x\Big]_0^t=\frac{\pi}{2}(t-\sin t)$

$V_1(t)=\frac{1}{3}\pi\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2t=\frac{\pi}{3}t\sin^2\frac{t}{2}$

$y=\sin\frac{x}{2}$ から　$y'=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$

$\mathrm{P}\left(t,\ \sin\frac{t}{2}\right)$ における $C$ の接線 $\ell$ の方程式は　$y-\sin\frac{t}{2}=\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}(x-t)$

すなわち　$y=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{t}{2}\right)x-\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}+\sin\frac{t}{2}$

$y=0$ とおくと　$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{t}{2}\right)x-\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}+\sin\frac{t}{2}=0$

よって　$x=t-2\tan\frac{t}{2}$

したがって　$V_2(t)=\frac{1}{3}\pi\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2\left\{t-\left(t-2\tan\frac{t}{2}\right)\right\}=\frac{2}{3}\pi\sin^2\frac{t}{2}\tan\frac{t}{2}$

(2)　$V_1(t)<V_0(t)<V_2(t)$ であるから

$$\frac{\pi}{3}t\sin^2\frac{t}{2}<\frac{\pi}{2}(t-\sin t)<\frac{2}{3}\pi\sin^2\frac{t}{2}\tan\frac{t}{2}$$

各辺を $\frac{\pi}{2}t^3$ $(>0)$ で割ると　$\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}<\frac{t-\sin t}{t^3}<\frac{4}{3}\cdot\frac{\sin^2\frac{t}{2}\tan\frac{t}{2}}{t^3}$

ここで　$\lim_{t\to+0}\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}=\lim_{t\to+0}\frac{1}{6}\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right)^2=\frac{1}{6}$

$$\lim_{t\to+0}\frac{4}{3}\cdot\frac{\sin^2\frac{t}{2}\tan\frac{t}{2}}{t^3}=\lim_{t\to+0}\frac{1}{6}\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right)^3\frac{1}{\cos\frac{t}{2}}=\frac{1}{6}$$

したがって　$\lim_{t\to+0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\frac{1}{6}$

$\boxed{9}$［2008 金沢大］

自然数 $n$ に対して，2 次正方行列 $A_n$ を

$$A_1=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix},\quad A_{n+1}=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}A_n\quad(n\geqq1)$$

により定める。また，2 次正方行列 $B_n$ は

$$B_{n+1}=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}B_n-\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\quad(n\geqq1)$$

を満たすとする。

(1)　数学的帰納法を用いて $A_n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}+3^{n-1}\\0&3^{n-1}\end{pmatrix}$ $(n\geqq1)$ が成り立つことを示せ。

(2)　ある 2 次正方行列 $C$ に対して，$C=B_n-A_n$ がすべての $n$ について成り立つとする。このとき，$C$ を求めよ。

(3)　(2) の条件を満たす $B_n$ のうち，逆行列をもたないものは $B_1$ に限ることを示せ。

(1)　$A_n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}+3^{n-1}\\0&3^{n-1}\end{pmatrix}$　……①　とする。

[1]　$n=1$ のとき　① の左辺 $=A_1=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$，① の右辺 $=\begin{pmatrix}2^0&2^0+3^0\\0&3^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$

よって，$n=1$ のとき ① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち $A_k=\begin{pmatrix}2^{k-1}&2^{k-1}+3^{k-1}\\0&3^{k-1}\end{pmatrix}$ と仮定する。

$n=k+1$ のときを考えると

$$A_{k+1}=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}A_k=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{k-1}&2^{k-1}+3^{k-1}\\0&3^{k-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2^k&2(2^{k-1}+3^{k-1})+3^{k-1}\\0&3^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^k&2^k+3^k\\0&3^k\end{pmatrix}$$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，① はすべての自然数 $n$ について成り立つ。

(2)　$B_{n+1}-A_{n+1}=\left\{\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}B_n-\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\right\}-\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}A_n$

$$=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}(B_n-A_n)-\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$$

であるから　$C=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}C-\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$

ゆえに　$\left\{\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}C=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$　　よって　$\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}C=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$

したがって　$C=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}$

(3)　(1)，(2) から

$$B_n=A_n+C=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}+3^{n-1}\\0&3^{n-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}+3^{n-1}+1\\1&3^{n-1}+2\end{pmatrix}$$

よって，$B_n$ について

$$\Delta=2^{n-1}(3^{n-1}+2)-(2^{n-1}+3^{n-1}+1)\cdot1=2^{n-1}\cdot3^{n-1}+2^{n-1}-3^{n-1}-1$$

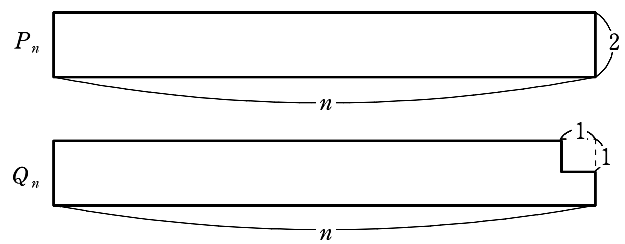
$=(2^{n-1}-1)(3^{n-1}+1)$

ゆえに　$n=1$ のとき $\Delta=0$，$n\geqq 2$ のとき $\Delta>0$

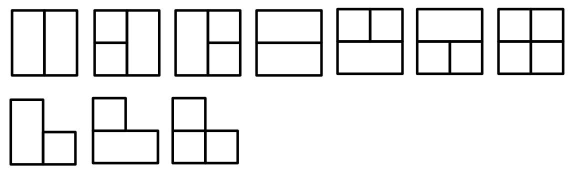
したがって，$B_n$ のうち逆行列をもたないものは $B_1$ に限る。

$\boxed{10}$［2008 金沢大］

自然数 $n$ に対して辺の長さが 2 と $n$ の長方形を $P_n$ とする。下図のように $P_n$ から 1 辺の長さ 1 の正方形を除いた図形を $Q_n$ とする。




この 2 つの図形 $P_n$ と $Q_n$ を，1 辺の長さ 1 の正方形および辺の長さが 1 と 2 の長方形のタイルを用いて，すきまなく埋めることを考える。$P_n$ および $Q_n$ をタイルで埋める異なるパターンの数を，それぞれ $p_n$ および $q_n$ とする。例えば $P_2$ と $Q_2$ を埋める異なるパターンはそれぞれ



となり，$p_2=7$，$q_2=3$ である。

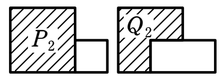
(1)　$q_3$ と $p_3$ を求めよ。

(2)　$q_{n+2}$ および $p_{n+2}$ を $p_{n+1}$，$q_{n+1}$，$p_n$ を用いて表せ。

(3)　$\begin{pmatrix} p_{n+2} \\ q_{n+2} \\ p_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ p_n \end{pmatrix}$ を満たす 3 次正方行列 $A$ を求めよ。

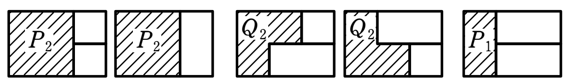
(4)　$p_5$ の値を求めよ。

(1)　右の図より　$q_3=p_2+q_2=7+3=10$




下の図より　$p_3=2p_2+2q_2+p_1$

$=2\cdot 7+2\cdot 3+2=22$




$p_2\times 2$　　$q_2\times 2$　　$p_1$

(2)　1 辺の長さ 1 の正方形のタイルを A，辺の長さが 1 と 2 の長方形のタイルを B とする。

$Q_{n+2}$ を埋める異なるパターンは，$P_{n+1}$ に A を加えるパターンと $Q_{n+1}$ に B を加えるパターンを合わせただけある。

よって　$q_{n+2}=p_{n+1}+q_{n+1}$

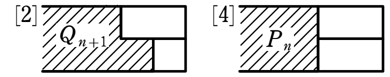
$P_{n+2}$ を埋める異なるパターンは，次のパターンを合わせただけある。

[1]　$P_{n+1}$ に A を 2 つ または B を 1 つ加える。

[2]　$Q_{n+1}$ に A，B を 1 つずつ，下の図のように加える。

[3]　[2] の上下を逆にする。

[4]　$P_n$ に B を 2 つ，下の図のように加える。




よって　$p_{n+2}=2p_{n+1}+2q_{n+1}+p_n$

(3)　$\begin{cases} p_{n+2}=2p_{n+1}+2q_{n+1}+p_n \\ q_{n+2}=p_{n+1}+q_{n+1}+0\cdot p_n \\ p_{n+1}=p_{n+1}+0\cdot q_{n+1}+0\cdot p_n \end{cases}$　であるから

$$\begin{pmatrix} p_{n+2} \\ q_{n+2} \\ p_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ p_n \end{pmatrix}$$　よって　$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(4)　(3) から　$\begin{pmatrix} p_5 \\ q_5 \\ p_4 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} p_4 \\ q_4 \\ p_3 \end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix} p_3 \\ q_3 \\ p_2 \end{pmatrix}$

$$A^2=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

よって　$p_5=7p_3+6q_3+2p_2=7\cdot 22+6\cdot 10+2\cdot 7=228$

別解　(2) から　$p_5=2p_4+2q_4+p_3=2(2p_3+2q_3+p_2)+2(p_3+q_3)+p_3$

$=7p_3+6q_3+2p_2=7\cdot 22+6\cdot 10+2\cdot 7=228$