金沢大学入試問題2009

1 ［2009 金沢大］

xy 平面において，点 A$(a,\ 0)$ を中心とする半径 r の円を C とする。ただし $0<r\leqq a$ とする。円 C の周上に，y 座標が正である点 P と，点 E$(a+r,\ 0)$ をとる。更に，点 P における円 C の接線と y 軸との交点を Q，2 点 E，P を通る直線と y 軸との交点を R，$\angle$AEP を θ とする。このとき，3 点 P，Q，R を頂点とする $\triangle$PQR について，次の問いに答えよ。

(1) $\triangle$PQR は辺 PR を底辺とする二等辺三角形であることを示せ。次に，これが正三角形となる場合の，θ の値を求めよ。

(2) $\triangle$PQR が正三角形となり，更に頂点の 1 つが原点と一致する場合の，a と r の関係式を求めよ。

(3) $\triangle$PQR が正三角形となり，更にその外接円の半径が円 C の半径 r と等しくなる場合の，a と r の関係式を求めよ。

(1) $\angle\mathrm{QPR}=180^\circ-\angle\mathrm{EPQ}=180^\circ-(\angle\mathrm{APQ}+\angle\mathrm{APE})$

$=180^\circ-(90^\circ+\theta)=90^\circ-\theta$

$\angle\mathrm{QRP}=180^\circ-(\angle\mathrm{ROE}+\angle\mathrm{REO})$

$=180^\circ-(90^\circ+\theta)=90^\circ-\theta$

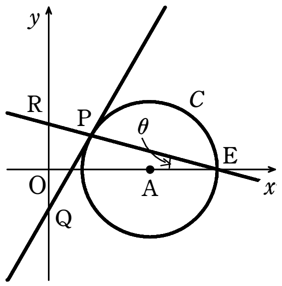
よって　　$\angle\mathrm{QPR}=\angle\mathrm{QRP}$

ゆえに，$\triangle$PQR は PR を底辺とする二等辺三角形である。

$\triangle$PQR が正三角形となるのは，

$\angle\mathrm{QPR}=\angle\mathrm{QRP}=60^\circ$ すなわち $90^\circ-\theta=60^\circ$ のとき。

よって　　$\theta=30^\circ$



(2) $\angle\mathrm{OEP}=30^\circ$ であるから　　$\angle\mathrm{OAP}=60^\circ$

また，Q が O と一致するから　　$\angle\mathrm{APO}=90^\circ$

よって　　$\angle\mathrm{AOP}=180^\circ-(60^\circ+90^\circ)=30^\circ$

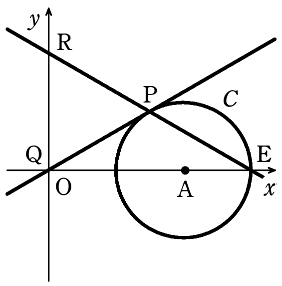
ゆえに　　$\mathrm{AP}:\mathrm{AO}=r:a=1:2$　　　したがって　　$a=2r$

(3) $\triangle$PQR が正三角形で，その外接円の半径が r であるから　　$\mathrm{PR}=\sqrt{3}\,r$

よって，P の x 座標は

$$\mathrm{PR}\sin\angle\mathrm{PRQ}=\sqrt{3}\,r\sin 60^\circ$$

$$=\sqrt{3}\,r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}r\quad\cdots\cdots①$$



一方，$\triangle$PQR が正三角形のとき，$\theta=30^\circ$ より

$\angle\mathrm{PAO}=60^\circ$ であるから，P の x 座標は

$$\mathrm{OA}-\mathrm{AP}\cos\angle\mathrm{PAO}=a-r\cos 60^\circ$$

$$=a-r\cdot\frac{1}{2}=a-\frac{r}{2}\quad\cdots\cdots②$$

①，② から　　$\dfrac{3}{2}r=a-\dfrac{r}{2}$　　　したがって　　$a=2r$

2 ［2009 金沢大］

実数 t と $0\leqq\theta<2\pi$ に対して，2 次関数 $f(x)$，$g(x)$ を $f(x)=x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}t^2$，

$g(x)=x^2+\left(t-\dfrac{1}{2}\right)x-\dfrac{1}{2}\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+\dfrac{1}{16}$ とする。

(1) $\dfrac{1}{2}$，$2\sin^2\theta\cos^2\theta$，$\sin^4\theta+\cos^4\theta$ の大小を比べよ。また，この 3 つの値が等しくなる θ の値をすべて求めよ。

(2) θ は (1) で求めた値とは異なる定数とする。

（ア） 2 次方程式 $g(x)=0$ の判別式を $D(t)$ とするとき，2 次方程式 $D(t)=0$ の解 α，β $(\alpha<\beta)$ を求め，$\displaystyle\int_\alpha^\beta D(t)\,dt=-\frac{\cos^6 2\theta}{6}$ となることを示せ。

（イ） 2 つの 2 次方程式 $f(x)=0$，$g(x)=0$ の一方が異なる 2 つの実数解をもち，他方が虚数解をもつための t の値の範囲を求めよ。

(1) $\sin^4\theta+\cos^4\theta-\dfrac{1}{2}=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta-\dfrac{1}{2}$

$$=1^2-\frac{1}{2}(2\sin\theta\cos\theta)^2-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta=\frac{1}{2}(1-\sin^2 2\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\cos^2 2\theta\geqq 0$$

$$\frac{1}{2}-2\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta=\frac{1}{2}\cos^2 2\theta\geqq 0$$

よって　　$2\sin^2\theta\cos^2\theta\leqq\dfrac{1}{2}\leqq\sin^4\theta+\cos^4\theta$

等号が成り立つのは，どちらも $\cos 2\theta=0$ のときで，$0\leqq\theta<2\pi$ より $0\leqq 2\theta<4\pi$ であるから

$$2\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi\quad\text{すなわち}\quad\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$$

のときである。

このとき，3 つの値が等しくなる。

(2) θ が (1) で求めた値とは異なるとき

$$2\sin^2\theta\cos^2\theta<\frac{1}{2}<\sin^4\theta+\cos^4\theta\quad\cdots\cdots①$$

（ア） $D(t)=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-4\left\{-\dfrac{1}{2}\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+\dfrac{1}{16}\right\}$

$$=(t-2\sin^2\theta\cos^2\theta)\{t-(\sin^4\theta+\cos^4\theta)\}$$

$D(t)=0$ の解 α，β $(\alpha<\beta)$ は，① により

$$\alpha=2\sin^2\theta\cos^2\theta,\ \beta=\sin^4\theta+\cos^4\theta$$

よって　　$\displaystyle\int_\alpha^\beta D(t)\,dt=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

$$=-\frac{1}{6}(\cos^4\theta-2\sin^2\theta\cos^2\theta+\sin^4\theta)^3$$

$$=-\frac{1}{6}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)^6=-\frac{1}{6}\cos^6 2\theta$$

（イ） $f(x)=0$ の判別式を D_f とすると

$$D_f=\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot1\cdot\frac{1}{4}t^2=\frac{1}{4}-t^2$$

$$=-\left(t+\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

2 次方程式 $f(x)=0$，$g(x)=0$ の一方が異なる 2 つの実数解をもち，他方が虚数解をもつための条件は，$D(t)$ と D_f が異符号となることである。

① により，$D(t)$ と D_f の符号は，次の表のようになる。

t	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$2\sin^2\theta\cos^2\theta$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\sin^4\theta+\cos^4\theta$	$\cdots$
$D(t)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
D_f	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$

よって，求める t の値の範囲は

$$t<-\frac{1}{2},\ 2\sin^2\theta\cos^2\theta<t<\frac{1}{2},\ \sin^4\theta+\cos^4\theta<t$$

金沢大学入試問題2009

3［2009 金沢大］

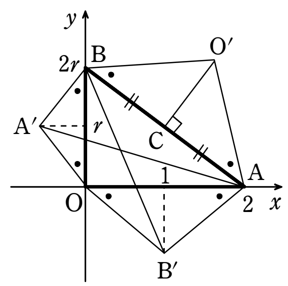
$0<r<1$ とし，点 O を原点とする xy 平面において，3 点 O，A$(2,\ 0)$，B$(0,\ 2r)$ を頂点とする三角形 OAB と，互いに相似な 3 つの二等辺三角形 O′AB，A′OB，B′OA を考える。ここで，辺 AB，OB，OA はそれぞれの二等辺三角形の底辺であり，点 O′ は直線 AB に対して点 O と反対側に，点 A′ は第 2 象限に，点 B′ は第 4 象限に，それぞれあるとする。$t=\tan\angle \mathrm{A'OB}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 点 A′，B′ の座標を，r，t の式で表せ。

(2) 直線 AA′，および直線 BB′ の方程式を $ax+by=c$ の形で求めよ。

(3) 2 直線 AA′ と BB′ の交点を M$(x_0,\ y_0)$ とする。比 $\dfrac{y_0}{x_0}$ を r，t の式で表せ。

(4) 点 O′ の座標を r，t の式で表し，3 直線 AA′，BB′，OO′ が 1 点で交わることを示せ。



(1) A′ の y 座標は r であるから，x 座標は

$$-r\tan\angle \mathrm{A'OB}=-rt$$

よって　A′$(-rt,\ r)$

$\tan\angle \mathrm{B'OA}=t$ であり，B′ の x 座標は 1 であるから，

y 座標は　$-1\cdot\tan\angle \mathrm{B'OA}=-t$

よって　B′$(1,\ -t)$

(2) 直線 AA′ の方程式は

$$y=\frac{0-r}{2-(-rt)}(x-2)$$

よって　$rx+(2+rt)y=2r$

直線 BB′ の方程式は　$y-2r=\dfrac{-t-2r}{1-0}x$

よって　$(t+2r)x+y=2r$

(3) M$(x_0,\ y_0)$ は 2 直線 AA′，BB′ 上にあるから

$$rx_0+(2+rt)y_0=2r,\ (t+2r)x_0+y_0=2r$$

よって　$rx_0+(2+rt)y_0=(t+2r)x_0+y_0$

整理して　$(t+r)x_0=(rt+1)y_0$

線分 BB′ は $x\geqq 0$ の範囲にあるから　$x_0>0$

また　$rt+1>0$

よって　$\dfrac{y_0}{x_0}=\dfrac{r+t}{rt+1}$

(4) 線分 AB の中点を C とすると　CO′⊥AC

C$(1,\ r)$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ r)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と同じ大きさで，$\overrightarrow{\mathrm{CO'}}$ と同じ向きのベクトルは　$(r,\ 1)$

$\dfrac{\mathrm{CO'}}{\mathrm{AC}}=t$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{CO'}}=t(r,\ 1)=(rt,\ t)$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OO'}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CO'}}=(1,\ r)+(rt,\ t)=(rt+1,\ r+t)$

すなわち，点 O′ の座標は　$(rt+1,\ r+t)$

ゆえに，直線 OO′ の傾きと $\dfrac{y_0}{x_0}$ が一致する。

したがって，3 直線 AA′，BB′，OO′ は 1 点で交わる。

4［2009 金沢大］

次の問いに答えよ。

(1) $x>0$ のとき，不等式 $\dfrac{2}{3}\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)\geqq 2^{\frac{1}{3}}$ を示せ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(2) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n{}^2}\right)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定める。

（ア） $n\geqq 1$ のとき $a_n>a_{n+1}>2^{\frac{1}{3}}$ を示せ。

（イ） $n\geqq 2$ のとき $a_{n+1}-\dfrac{2}{a_n{}^2}<\dfrac{2}{3}\left(a_n-\dfrac{2}{a_{n-1}{}^2}\right)$ を示せ。

（ウ） $n\geqq 1$ のとき $0<a_{n+1}-\dfrac{2}{a_n{}^2}\leqq\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ を示せ。

(1) $x>0$，$\dfrac{2}{x^2}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係より

$$\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{3}\left(x+x+\frac{2}{x^2}\right)\geqq\sqrt[3]{x\cdot x\cdot\frac{2}{x^2}}=2^{\frac{1}{3}}$$

等号が成り立つのは，$x=\dfrac{2}{x^2}$ かつ $x>0$ すなわち $x=2^{\frac{1}{3}}$ のときである。

(2) （ア） $a_1=2$ と $a_{n+1}=\dfrac{2}{3}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n{}^2}\right)$ から，すべての自然数 n について $a_n>0$ である。したがって，(1) で示したことから，すべての自然数 n について $a_n>2^{\frac{1}{3}}$ が成り立つ。…… ①

したがって　$a_n{}^3-2>0$

よって　$a_n-a_{n+1}=a_n-\dfrac{2}{3}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n{}^2}\right)=\dfrac{1}{3}\left(a_n-\dfrac{2}{a_n{}^2}\right)=\dfrac{a_n{}^3-2}{3a_n{}^2}>0$

ゆえに　$a_n>a_{n+1}$　…… ②

①，② から　$a_n>a_{n+1}>2^{\frac{1}{3}}$　$(n\geqq 1)$

（イ） $\dfrac{2}{3}\left(a_n-\dfrac{2}{a_{n-1}{}^2}\right)-\left(a_{n+1}-\dfrac{2}{a_n{}^2}\right)=\dfrac{2}{3}\left(a_n-\dfrac{2}{a_{n-1}{}^2}\right)-\dfrac{2}{3}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n{}^2}\right)+\dfrac{2}{a_n{}^2}$

$$=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{a_n{}^2}-\frac{1}{a_{n-1}{}^2}\right)>0\quad(a_{n-1}>a_n>0\ より)$$

よって　$a_{n+1}-\dfrac{2}{a_n{}^2}<\dfrac{2}{3}\left(a_n-\dfrac{2}{a_{n-1}{}^2}\right)$　$(n\geqq 2)$

（ウ） $n\geqq 1$ のとき

$$a_{n+1}-\frac{2}{a_n{}^2}=\frac{2}{3}\left(a_n+\frac{1}{a_n{}^2}\right)-\frac{2}{a_n{}^2}$$

$$=\frac{2}{3}\left(a_n-\frac{2}{a_n{}^2}\right)=\frac{2(a_n{}^3-2)}{3a_n{}^2}>0$$

また，（イ）から $n\geqq 2$ のとき　$a_{n+1}-\dfrac{2}{a_n{}^2}<\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\left(a_2-\dfrac{2}{a_1{}^2}\right)$

$a_1=2$ であるから　$a_2=\dfrac{2}{3}\left(2+\dfrac{1}{2^2}\right)=\dfrac{3}{2}$

よって　$a_2-\dfrac{2}{a_1{}^2}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{2^2}=1$

ゆえに　$a_{n+1}-\dfrac{2}{a_n{}^2}<\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　$(n\geqq 2)$

$n=1$ のときは，$a_2-\dfrac{2}{a_1{}^2}=1$，$\left(\dfrac{2}{3}\right)^0=1$ であるから

$$a_{n+1}-\frac{2}{a_n{}^2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\quad(n=1)$$

以上から，$n\geqq 1$ のとき　$0<a_{n+1}-\dfrac{2}{a_n{}^2}\leqq\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\boxed{5}$ ［2009 金沢大］

A，B 2 人が次のようなゲームを行う。第三者（A，B 以外の中立的立場の者）がさいころを投げ，1 の目が出たら A だけに 3 点，3 の目が出たら A だけに 2 点を与え，2 か 4 の目が出たら B だけに 2 点を与える。その他の目が出たら，A にも B にも点を与えない。この試行を何回か繰り返し，先に得点の合計が 4 点以上になった方を勝ちとする。1 回目の試行で B が勝つ確率を p_1 とする。$n \geqq 2$ のとき，$n-1$ 回目までの試行では勝負はつかず，n 回目の試行で B が勝つ確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1) p_1，p_2，p_3，p_4 を求めよ。また一般項 p_n を求めよ。

(2) $q_n = 9p_{n+2} - 6p_{n+1} + p_n$ とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{k} q_n$ を求めよ。また $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} p_n$ を求めよ。

(3) $a = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ とするとき $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \left| \sum_{n=1}^{k} p_n - a \right|$ を求めよ。ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{3^k} = 0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ を用いてよい。

(1) 1 回目では B の得点は 0 または 2 であるから　　$p_1 = 0$

2 回目で B が勝つのは，1 回目と 2 回目ともに B が得点を得るときであるから

$$p_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

3 回目で B が勝つのは，1 回目もしくは 2 回目のいずれかに B が得点を得て，3 回目に B が得点を得るときであるから

$$p_3 = {}_2\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

4 回目で B が勝つのは，次の [1]，[2] のいずれかの場合である。

[1]　1 回目から 3 回目のうち A と B が 1 回ずつ得点を得て，4 回目に B が得点を得る

[2]　1 回目から 3 回目のうち B だけが 1 回得点を得て，4 回目に B が得点を得る

[1]，[2] は互いに排反であるから

$$p_4 = {}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \frac{1}{3} + {}_3\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$n \geqq 3$ のとき，n 回目で B が勝つのは，次の [1]，[2] のいずれかの場合である。

[1]　1 回目から $(n-1)$ 回目のうち A と B が 1 回ずつ得点を得て，n 回目に B が得点を得る

[2]　1 回目から $(n-1)$ 回目のうち B だけが 1 回得点を得て，n 回目にB が得点を得る

[1]，[2] は互いに排反であるから

$$p_n = {}_{n-1}\mathrm{C}_1 \cdot {}_{n-2}\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3} \times \frac{1}{3} + {}_{n-1}\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{3^n} + \frac{n-1}{3^n} = \frac{(n-1)^2}{3^n}$$

これは $n=1$，$n=2$ のときも成り立つ。

(2) $q_n = 9p_{n+2} - 6p_{n+1} + p_n = 9 \cdot \dfrac{(n+1)^2}{3^{n+2}} - 6 \cdot \dfrac{n^2}{3^{n+1}} + \dfrac{(n-1)^2}{3^n}$

$$= \frac{1}{3^n}\{(n+1)^2 - 2n^2 + (n-1)^2\}$$

$$= \frac{2}{3^n}$$

よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{k} q_n = \frac{\frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{3^k}\right)}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3^k}$

また　$\displaystyle\sum_{n=1}^{k} q_n = 9\sum_{n=1}^{k} p_{n+2} - 6\sum_{n=1}^{k} p_{n+1} + \sum_{n=1}^{k} p_n$

$$= 9\left(p_{k+2} + p_{k+1} + \sum_{n=1}^{k} p_n - p_1 - p_2\right) - 6\left(p_{k+1} + \sum_{n=1}^{k} p_n - p_1\right) + \sum_{n=1}^{k} p_n$$

$$= 9p_{k+2} + 3p_{k+1} - 3p_1 - 9p_2 + 4\sum_{n=1}^{k} p_n$$

$$= 9 \cdot \frac{(k+1)^2}{3^{k+2}} + 3 \cdot \frac{k^2}{3^{k+1}} - 3 \cdot 0 - 9 \cdot \frac{1}{9} + 4\sum_{n=1}^{k} p_n$$

$$= \frac{2k^2 + 2k + 1}{3^k} - 1 + 4\sum_{n=1}^{k} p_n$$

よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{k} p_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{3^k} - \frac{2k^2 + 2k + 1}{3^k} + 1\right) = \frac{1}{2} - \frac{k^2 + k + 1}{2 \cdot 3^k}$

(3) $a = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} p_n = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{k^2 + k + 1}{2k^2} \cdot \frac{k^2}{3^k}\right)$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}}{2} \cdot \frac{k^2}{3^k}\right) = \frac{1}{2}$$

よって　$\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \left| \sum_{n=1}^{k} p_n - a \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \frac{k^2 + k + 1}{2 \cdot 3^k}$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\left\{\log k + \log\left(k + 1 + \frac{1}{k}\right) - \log 2 - \log 3^k\right\}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left\{\frac{\log k}{k} + \frac{\log\left(k + 1 + \frac{1}{k}\right)}{k + 1 + \frac{1}{k}} \cdot \frac{k + 1 + \frac{1}{k}}{k} - \frac{\log 2}{k} - \frac{k \log 3}{k}\right\}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left\{\frac{\log k}{k} + \frac{\log\left(k + 1 + \frac{1}{k}\right)}{k + 1 + \frac{1}{k}}\left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\right) - \frac{\log 2}{k} - \log 3\right\}$$

$$= -\log 3$$

$\boxed{6}$ ［2009 金沢大］

関数 $f(t)$ は区間 $[-1, 1]$ で連続で，偶関数，すなわち $f(-t) = f(t)$ であるとする。次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)\,dt = \int_{0}^{1} f(t)\,dt$ を示せ。

(2) 関数 $F(x) = -\displaystyle\int_{-1}^{1} |t - x| f(t)\,dt$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ について

$$F'(x) = -\int_{-1}^{x} f(t)\,dt + \int_{x}^{1} f(t)\,dt$$

$$F''(x) = -2f(x)$$

を示せ。

(3) 関数 $f(x)$ は，更に等式 $f(x) = -\displaystyle\int_{-1}^{1} |t - x| f(t)\,dt$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ を満たすとする。このとき，関数 $g(x) = f(x) - f(0)\cos\sqrt{2}\,x$ について

$$g(0) = g'(0) = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\{g'(x)\}^2 + \{g(x)\}^2\right)' = 0$$

が成り立つことを示し，$f(x) = f(0)\cos\sqrt{2}\,x$ を導け。

(1) $t = -u$ とおくと　　$dt = -du$

t	$-1 \to 0$
u	$1 \to 0$

よって　$\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)\,dt = \int_{1}^{0} f(-u)(-du)$

$$= \int_{0}^{1} f(-u)\,du = \int_{0}^{1} f(u)\,du$$

$$= \int_{0}^{1} f(t)\,dt$$

(2) $-1 \leqq x \leqq 1$ であるから，

$-1 \leqq t \leqq x$ のとき　$|t - x| = -(t - x)$

$x \leqq t \leqq 1$ のとき　$|t - x| = t - x$

よって　$F(x) = -\displaystyle\int_{-1}^{x} \{-(t - x)\} f(t)\,dt - \int_{x}^{1} (t - x) f(t)\,dt$

$$= \int_{-1}^{x} t f(t)\,dt - x\int_{-1}^{x} f(t)\,dt - \int_{x}^{1} t f(t)\,dt + x\int_{x}^{1} f(t)\,dt$$

$$F'(x) = x f(x) - \int_{-1}^{x} f(t)\,dt - x f(x) + x f(x) + \int_{x}^{1} f(t)\,dt - x f(x)$$

$$= -\int_{-1}^{x} f(t)\,dt + \int_{x}^{1} f(t)\,dt$$

$$F''(x) = -f(x) - f(x) = -2f(x)$$

(3) $g(x) = f(x) - f(0)\cos\sqrt{2}\,x$ から

$g(0) = f(0) - f(0) = 0$

$g'(x) = f'(x) + \sqrt{2}\,f(0)\sin\sqrt{2}\,x$　…… ①

① から　　$g'(0) = f'(0)$

ここで，$f(x) = F(x)$ より　　$f'(x) = F'(x)$

(2) より，$f'(x) = -\displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,dt + \int_{x}^{1} f(t)\,dt$ であるから

$$f'(0) = -\int_{-1}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{1} f(t)\,dt$$

(1) より，$\int_{-1}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{1} f(t)dt$ であるから　　$f'(0)=0$

ゆえに　　$g'(0)=0$

また　　$\left[\frac{1}{2}\{g'(x)\}^2+\{g(x)\}^2\right]' = g'(x)g''(x)+2g(x)g'(x)$

$$= g'(x)\{g''(x)+2g(x)\}$$

① から　　$g''(x)=f''(x)+2f(0)\cos\sqrt{2}\,x$

(2) より，$f''(x)=-2f(x)$ であるから

$$g''(x)=-2f(x)+2f(0)\cos\sqrt{2}\,x$$
$$=-2\{f(x)-f(0)\cos\sqrt{2}\,x\}=-2g(x)$$

したがって　　$\left[\frac{1}{2}\{g'(x)\}^2+\{g(x)\}^2\right]'=0$

よって，$\frac{1}{2}\{g'(x)\}^2+\{g(x)\}^2$ は定数である。

$\frac{1}{2}\{g'(x)\}^2+\{g(x)\}^2=C$ として，$x=0$ を代入すると

$$\frac{1}{2}\{g'(0)\}^2+\{g(0)\}^2=C$$

$g'(0)=g(0)=0$ であるから　　$C=0$

ゆえに　　$\frac{1}{2}\{g'(x)\}^2+\{g(x)\}^2=0$

$g'(x)$，$g(x)$ は実数の値をとるから　　$\{g'(x)\}^2 \geqq 0$，$\{g(x)\}^2 \geqq 0$

ゆえに　　$g'(x)=0$，$g(x)=0$

$g(x)=0$ より　　$f(x)=f(0)\cos\sqrt{2}\,x$

$\boxed{7}$［2009 金沢大］

α と β は定数で，2 つの数列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ は次の関係式を満たすとする。

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 4y_n-\alpha,\quad \sum_{k=1}^{n} y_k = 9x_n-\beta \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1)　x_1 と y_1 を，α と β だけの式で表せ。

(2)　2 次の正方行列 A で $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ がすべての自然数 n について成り立つものを求めよ。

(3)　$\alpha=14$，$\beta=-21$ のとき，$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ を求め，さらに $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ の一般項を求めよ。

$\sum_{k=1}^{n} x_k = S_n$，$\sum_{k=1}^{n} y_k = T_n$ とおくと

$$S_n=4y_n-\alpha \quad \cdots\cdots ①,\quad T_n=9x_n-\beta \quad \cdots\cdots ② \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　①，② において $n=1$ とすると　　$x_1=4y_1-\alpha$，$y_1=9x_1-\beta$

これらを連立させて解くと　　$x_1=\frac{1}{35}(\alpha+4\beta)$，$y_1=\frac{1}{35}(9\alpha+\beta)$

(2)　①，② において n を $n+1$ とすると

$$S_{n+1}=4y_{n+1}-\alpha \quad \cdots\cdots ③,\quad T_{n+1}=9x_{n+1}-\beta \quad \cdots\cdots ④$$

③ − ① から　　$x_{n+1}=4y_{n+1}-4y_n$

すなわち　　$x_{n+1}-4y_{n+1}=-4y_n$　　…… ⑤

④ − ② から　　$y_{n+1}=9x_{n+1}-9x_n$

すなわち　　$9x_{n+1}-y_{n+1}=9x_n$　　…… ⑥

⑤，⑥ を行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

行列 $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$ について

$$\Delta = 1\cdot(-1)-(-4)\cdot 9 = 35 \neq 0$$

ゆえに　　$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 36 & 4 \\ 9 & 36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

したがって　　$A=\frac{1}{35}\begin{pmatrix} 36 & 4 \\ 9 & 36 \end{pmatrix}$

(3)　$\alpha=14$，$\beta=-21$ のとき，(1) から　　$x_1=-2$，$y_1=3$

よって　　$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 36 & 4 \\ 9 & 36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{6}{7}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

ゆえに　　$A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{6}{7}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

また，$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ から

$n \geqq 2$ のとき　　$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　　$x_n=-2\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}$，$y_n=3\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}$