金沢大学入試問題2010

$\boxed{1}$［2010 金沢大］

O を原点とする座標平面上の円 $C: x^2+y^2=1$ と直線 $x+2y=1$ の交点のうち，x 座標の小さい方を P，他方を Q とする。点 P，Q における円 C の接線をそれぞれ ℓ，m とする。

(1) P，Q の座標を求めよ。また，ℓ と m の交点 R の座標を求めよ。

(2) 線分 OR と C の交点を S とする。S の座標を求めよ。また，△QRS の面積を求めよ。

(3) $\angle\mathrm{PQS}=\angle\mathrm{RQS}$ であることを示せ。

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots\cdots ① \\ x+2y=1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①，② から y を消去すると　$x^2+\left\{\dfrac{1}{2}(1-x)\right\}^2=1$

すなわち　$5x^2-2x-3=0$　　これを解くと　$x=1,\ -\dfrac{3}{5}$

よって　$(x,\ y)=(1,\ 0),\ \left(-\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$

ゆえに，P，Q の座標は　$\mathrm{P}\left(-\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$，$\mathrm{Q}(1,\ 0)$

ℓ の方程式は　$-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y=1$　　m の方程式は　$x=1$

したがって，ℓ，m の交点は　$\mathrm{R}(1,\ 2)$

(2) 直線 OR の方程式は　$y=2x$

① との交点のうち，線分 OR 上のものは　$\mathrm{S}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

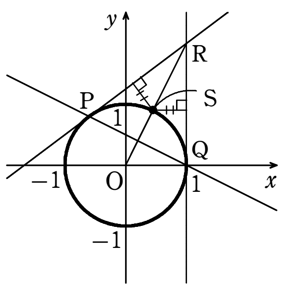
また，$\mathrm{QR}=2$ で，S から QR への垂線の長さは $1-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ であるから

$$\triangle\mathrm{QRS}=\frac{1}{2}\cdot 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{5-\sqrt{5}}{5}$$

(3) 点 S と直線 PR の距離は点 S と直線 QR の距離に等しい。

また，点 S と直線 PQ の距離を求めると，PQ の方程式は $x+2y-1=0$ から

$$\frac{\left|\dfrac{1}{\sqrt{5}}+2\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}-1\right|}{\sqrt{5}}=\frac{5-\sqrt{5}}{5}$$



よって，点 S は 3 直線 PQ，PR，QR から等距離にある。

ゆえに，S は △PQR の内心である。

したがって　$\angle\mathrm{PQS}=\angle\mathrm{RQS}$

別解　接弦定理により　$\angle\mathrm{RQS}=\angle\mathrm{QPS}$

また，△SPQ は二等辺三角形であるから　$\angle\mathrm{QPS}=\angle\mathrm{PQS}$

よって　$\angle\mathrm{PQS}=\angle\mathrm{RQS}$

$\boxed{2}$［2010 金沢大］

座標平面において，円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ $(0<b<1)$ における接線を ℓ とし，ℓ と x 軸の交点を Q とする。点 $\mathrm{R}(4,\ 0)$ と ℓ の距離が 2 であるとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 P の座標 $(a,\ b)$ を求めよ。

(2) △PQR の面積を求めよ。

(1) 円 $C: x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ $(0<b<1 \cdots ①)$ における接線が ℓ であるから

$\ell: ax+by=1 \quad \cdots ②$，$a^2+b^2=1 \quad \cdots ③$

ここで，② から　点 $\mathrm{R}(4,\ 0)$ と ℓ の距離 d は　$d=\dfrac{|4a-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2$

よって，③ から　$4a-1=\pm 2$ より　$4a=3,\ -1$　　したがって　$a=\dfrac{3}{4},\ -\dfrac{1}{4}$

ゆえに，①，③ より　$\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{\sqrt{7}}{4}\right),\ \left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)$

(2) ℓ と x 軸の交点が Q であるから，② で　$y=0$ とおくと　$ax=1$

①，③ により $a\neq 0$ であるから　$x=\dfrac{1}{a}$

よって　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{a},\ 0\right)$　　また　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\times\mathrm{QR}\times b$

[1] $\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$ のとき　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{4}{3},\ 0\right)$ より

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\times\left(4-\frac{3}{4}\right)\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{\sqrt{7}}{3}$$

[2] $\mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)$ のとき　$\mathrm{Q}(-4,\ 0)$ より

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\times\{4-(-4)\}\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\sqrt{15}$$

$\boxed{3}$［2010 金沢大］

(1) $x>0$，$x\neq 1$ とする。方程式 $\log_2 x+2\log_x 2=3$ を解け。

(2) $x>0$，$x\neq 2$，$y>0$ とする。次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} \log_{\frac{x}{2}} y=2 \\ xy=16 \end{cases}$$

(3) $x>0$，$x\neq 2$，$y>0$ とする。次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\begin{cases} \log_{\frac{x}{2}} y<2 \\ xy<16 \end{cases}$$

(1) $x\neq 1$ から　$\log_2 x\neq 0$

$\log_2 x+2\log_x 2=3$ から　$\log_2 x+2\cdot\dfrac{\log_2 2}{\log_2 x}=3$

$$(\log_2 x)^2-3\log_2 x+2=0$$
$$(\log_2 x-1)(\log_2 x-2)=0$$

よって　$\log_2 x=1$　または　$\log_2 x=2$　　ゆえに　$x=2,\ 4$

これは $x>0$，$x\neq 1$ を満たすから，求める解である。

(2) $x>0$，$x\neq 2$，$y>0$ から，$\log_{\frac{x}{2}} y=2$ より　$y=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=\dfrac{x^2}{4}$

これを $xy=16$ に代入して　$\dfrac{x^3}{4}=16$

すなわち　$x^3=64$　　よって　$x=4$　　このとき　$y=4$

これらは $x>0$，$x\neq 2$，$y>0$ を満たす。

したがって，求める解は　$x=4$，$y=4$

(3) $\begin{cases} \log_{\frac{x}{2}} y<2 & \cdots\cdots ① \\ xy<16 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

$x>0$ かつ ② から　$y<\dfrac{16}{x}$

[1] $0<\dfrac{x}{2}<1$ すなわち $0<x<2$ のとき　① から　$y>\dfrac{x^2}{4}$

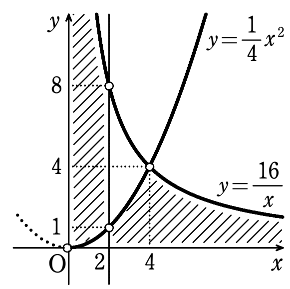
[2] $1<\dfrac{x}{2}$ すなわち $2<x$ のとき　① から　$y<\dfrac{x^2}{4}$

以上から，x，y の満たすべき条件は

$x>0$，$x\neq 2$，$y>0$，$y<\dfrac{16}{x}$，

$0<x<2$ のとき　$y>\dfrac{x^2}{4}$，

$2<x$ のとき　$y<\dfrac{x^2}{4}$



よって，連立不等式の表す領域は右の図の斜線部分である。

ただし，境界はすべて含まない。

金沢大学入試問題2010

$\boxed{4}$ [2010 金沢大]

a を正の定数とする。2つの放物線 $C_1: y=x^2$ と $C_2: y=(x-2)^2+4a$ の交点をPとする。

(1) 放物線 C_1 上の点 Q $(t,\ t^2)$ における接線の方程式を求めよ。更に，その接線のうち C_2 に接するものを ℓ とする。ℓ の方程式を求めよ。

(2) 点Pを通り y 軸に平行な直線を m とする。ℓ と m の交点をRとするとき，線分PRの長さを求めよ。

(3) 直線 ℓ，m と放物線 C_1 で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1) $C_1: y=x^2$ ……①，　$C_2: y=(x-2)^2+4a$ ……②

①から　$y'=2x$

よって，C_1 上の点 Q $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は

$y=2t(x-t)+t^2$　すなわち　$y=2tx-t^2$ ……③

②，③から y を消去して　$(x-2)^2+4a=2tx-t^2$

よって　$x^2-2(t+2)x+t^2+4a+4=0$ ……④

放物線 C_2 と③の接線が接する条件は，方程式④が重解をもつことである。

よって，この判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(t+2)^2-(t^2+4a+4)=0$

よって，$4t-4a=0$ から　$t=a$

したがって，求める接線 ℓ の方程式は　$y=2ax-a^2$

(2) ①，②から y を消去して　$x^2=(x-2)^2+4a$

整理すると　$x=a+1$

よって，C_1 と C_2 の交点Pの座標は　$(a+1,\ (a+1)^2)$

点Pを通り，y 軸に平行な直線 m の方程式は　$x=a+1$

ℓ と m の交点は，$x=a+1$ を ℓ の式に代入して

$y=2a(a+1)-a^2=a^2+2a$

よって，点Rの座標は　$(a+1,\ a^2+2a)$

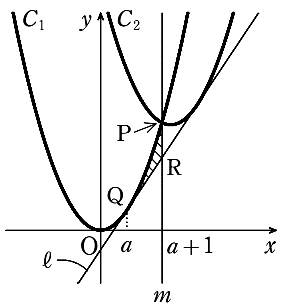
ゆえに　$\mathrm{PR}=(a+1)^2-(a^2+2a)=1$

(3) (1)から，C_1 と ℓ の接点の x 座標は a である。

よって，求める面積は

$$\int_a^{a+1}\{x^2-(2ax-a^2)\}dx=\int_a^{a+1}(x-a)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-a)^3\right]_a^{a+1}=\frac{1}{3}$$



$\boxed{5}$ [2010 金沢大]

座標空間において，中心が A $(0,\ 0,\ a)$ $(a>0)$ で半径が r の球面 $x^2+y^2+(z-a)^2=r^2$ は，点 B $(\sqrt{5},\ \sqrt{5},\ a)$ と点 $(1,\ 0,\ -1)$ を通るものとする。

(1) r と a の値を求めよ。

(2) 点 P $(\cos t,\ \sin t,\ -1)$ について，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を求めよ。更に内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を求めよ。

(3) $\triangle\mathrm{ABP}$ の面積 S を t を用いて表せ。また，t が $0\leqq t\leqq 2\pi$ の範囲を動くとき，S の最小値と，そのときの t の値を求めよ。

(1) 球面 $x^2+y^2+(z-a)^2=r^2$ を C とおく。

C が B $(\sqrt{5},\ \sqrt{5},\ a)$ を通るから　$5+5+0=r^2$

ゆえに，$r>0$ から　$r=\sqrt{10}$

このとき，C が点 $(1,\ 0,\ -1)$ を通るから　$1+0+(-1-a)^2=10$

ゆえに　$(a+1)^2=9$　よって，$a>0$ から　$a=2$

(2) (1)から　A $(0,\ 0,\ 2)$，B $(\sqrt{5},\ \sqrt{5},\ 2)$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\sqrt{5},\ \sqrt{5},\ 0)$

また　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\cos t,\ \sin t,\ -3)$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\sqrt{5}\cos t+\sqrt{5}\sin t$

(3) $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}})^2}$

(2)から　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=5+5=10$,

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=\cos^2 t+\sin^2 t+9=10$,

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\sqrt{5}\cos t+\sqrt{5}\sin t=\sqrt{10}\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)$

ゆえに　$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{100-10\sin^2\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)}$

$=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\sqrt{10-\sin^2\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)}$

よって，$0\leqq t\leqq 2\pi$ から　$\dfrac{\pi}{4}\leqq t+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{9}{4}\pi$

ゆえに，$-1\leqq\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ であるから

$0\leqq\sin^2\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

よって　$\dfrac{\sqrt{10}}{2}\sqrt{10-1}\leqq S\leqq\dfrac{\sqrt{10}}{2}\sqrt{10-0}$

すなわち　$\dfrac{3\sqrt{10}}{2}\leqq S\leqq 5$

したがって，$t+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$ すなわち $t=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi$ で，最小値 $\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$ をとる。

$\boxed{6}$ [2010 金沢大]

a $(a>0)$ を定数とし，$f(x)=2a\log x-(\log x)^2$ とする。関数 $y=f(x)$ のグラフは，x 軸と点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ 0)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ 0)$ $(x_1<x_2)$ で交わっている。

(1) x_1，x_2 の値を求めよ。また，$y=f(x)$ の最大値と，そのときの x の値を求めよ。

(2) 点 P_1，P_2 における $y=f(x)$ の接線をそれぞれ ℓ_1，ℓ_2 とする。ℓ_1 と ℓ_2 の交点の x 座標を $X(a)$ と表すとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}X(a)$ を求めよ。

(3) $a=1$ とするとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1) $2a\log x-(\log x)^2=0$ とすると　$\log x(2a-\log x)=0$

よって　$\log x=0,\ 2a$　すなわち　$x=1,\ e^{2a}$

ここで，$a>0$ より　$e^{2a}>1$

$x_1<x_2$ であるから　$x_1=1$，$x_2=e^{2a}$

また　$f'(x)=2a\cdot\dfrac{1}{x}-2\log x\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{2(a-\log x)}{x}$

$f'(x)=0$ とすると　$\log x=a$

よって　$x=e^a$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	e^a	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	↗	a^2	↘

したがって，$f(x)$ は $x=e^a$ のとき最大値 a^2 をとる。

(2) 点 $\mathrm{P}_1(1,\ 0)$ における $y=f(x)$ の接線 ℓ_1 の方程式は

$y-0=f'(1)(x-1)$　すなわち　$y=2ax-2a$

点 $\mathrm{P}_2(e^{2a},\ 0)$ における $y=f(x)$ の接線 ℓ_2 の方程式は

$y-0=f'(e^{2a})(x-e^{2a})$　すなわち　$y=-\dfrac{2a}{e^{2a}}x+2a$

$X(a)$ は ℓ_1 と ℓ_2 の交点の x 座標であるから　$2aX(a)-2a=-\dfrac{2a}{e^{2a}}X(a)+2a$

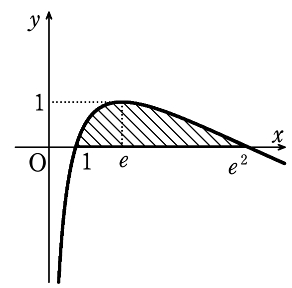
両辺を $2a$ (>0) で割って整理すると　$X(a)\cdot\dfrac{e^{2a}+1}{e^{2a}}=2$

$\dfrac{e^{2a}+1}{e^{2a}}>0$ であるから　$X(a)=\dfrac{2e^{2a}}{e^{2a}+1}$

よって　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}X(a)=\lim_{a\to\infty}\frac{2e^{2a}}{e^{2a}+1}=\lim_{a\to\infty}\frac{2}{1+\dfrac{1}{e^{2a}}}=2$

(3) $a=1$ のとき，(1)より，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

よって，求める面積を S とすると，S は右の図の斜線部分の面積である。



ゆえに　$S=\displaystyle\int_1^{e^2}\{2\log x-(\log x)^2\}dx$

$=2\displaystyle\int_1^{e^2}\log x\,dx-\int_1^{e^2}(\log x)^2dx$

ここで　$\displaystyle\int_1^{e^2}\log x\,dx=\Big[x\log x-x\Big]_1^{e^2}=e^2+1$

$\displaystyle\int_1^{e^2}(\log x)^2dx=\Big[x(\log x)^2\Big]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}dx$

$$=4e^2-2\int_1^{e^2}\log x\,dx=4e^2-2(e^2+1)$$

$$=2e^2-2$$

よって　$S=2(e^2+1)-(2e^2-2)=4$

$\boxed{7}$［2010 金沢大］

行列 $A=\begin{pmatrix}0 & -r\\ -r & 0\end{pmatrix}$ $(r>0)$ と座標平面上の点 $\mathrm{P}_0(-1,\ 2)$，$\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$，…

…，$\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$，…… は，式

$$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を満たすものとする。

(1)　A^{2k}，A^{2k+1} $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を求めよ。

(2)　x_n，y_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を求めよ。

(3)　線分 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ の長さを d_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とする。数列 $\{d_n\}$ の初項 d_1 と一般項 d_n を求めよ。また，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}d_n$ が収束し，その和が 3 となるような r の値を求めよ。

(1)　$A=\begin{pmatrix}0 & -r\\ -r & 0\end{pmatrix}$ から　$A^2=\begin{pmatrix}r^2 & 0\\ 0 & r^2\end{pmatrix}=r^2E$

よって，$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して

$$A^{2k}=(A^2)^k=(r^2E)^k=r^{2k}E=\begin{pmatrix}r^{2k} & 0\\ 0 & r^{2k}\end{pmatrix},$$

$$A^{2k+1}=A^{2k}A=\begin{pmatrix}r^{2k} & 0\\ 0 & r^{2k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -r\\ -r & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -r^{2k+1}\\ -r^{2k+1} & 0\end{pmatrix}$$

(2)　[1]　$n=1$ のとき

$$\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -r\\ -r & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2r\\ r\end{pmatrix}$$

[2]　$n=2k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ のとき

$$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=A^{2k}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}=r^{2k}E\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-r^{2k}\\ 2r^{2k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-r^n\\ 2r^n\end{pmatrix}$$

よって　$x_n=-r^n$，$y_n=2r^n$

[3]　$n=2k+1$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ のとき

$$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=A^{2k+1}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -r^{2k+1}\\ -r^{2k+1} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2r^{2k+1}\\ r^{2k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2r^n\\ r^n\end{pmatrix}$$

よって　$x_n=-2r^n$，$y_n=r^n$　……①

ここで，[1] より，$x_1=-2r$，$y_1=r$ であるから，① は $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに，n が奇数のとき　$x_n=-2r^n$，$y_n=r^n$

n が偶数のとき　$x_n=-r^n$，$y_n=2r^n$

(3)　$d_1=\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1=\sqrt{\{-2r-(-1)\}^2+(r-2)^2}=\sqrt{5r^2-8r+5}$

次に，一般項 d_n を求める。

[1]　n が奇数のとき

$$d_n=\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n=\sqrt{\{-2r^n-(-r^{n-1})\}^2+(r^n-2r^{n-1})^2}=r^{n-1}\sqrt{5r^2-8r+5}$$

[2]　n が偶数のとき

$$d_n=\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n=\sqrt{\{-r^n-(-2r^{n-1})\}^2+(2r^n-r^{n-1})^2}=r^{n-1}\sqrt{5r^2-8r+5}$$

よって，[1]，[2] より，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して　$d_n=r^{n-1}\sqrt{5r^2-8r+5}$

ゆえに，$\sum_{n=1}^{\infty}d_n$ は初項 $\sqrt{5r^2-8r+5}$，公比 r の無限等比級数である。

$5r^2-8r+5\fallingdotseq 0$ であるから，無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty}d_n$ が収束するための条件は　$|r|<1$

$r>0$ であるから　$0<r<1$　……②

このとき　$\sum_{n=1}^{\infty}d_n=\dfrac{\sqrt{5r^2-8r+5}}{1-r}$

よって，条件から　$\dfrac{\sqrt{5r^2-8r+5}}{1-r}=3$

すなわち　$\sqrt{5r^2-8r+5}=3(1-r)$

② より，両辺は正であるから，両辺を 2 乗して整理すると　$2r^2-5r+2=0$

すなわち　$(2r-1)(r-2)=0$　　② より　$r=\dfrac{1}{2}$