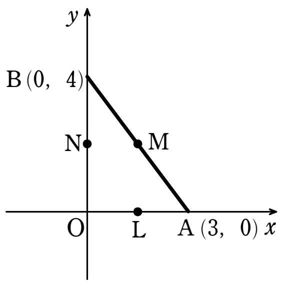
金沢大学入試問題2011

$\boxed{1}$［2011 金沢大］

座標平面上に点 A(3, 0)，B(0, 4) をとる。また，原点 O と A の中点を L，A と B の中点を M，B と O の中点を N とする。さらに，△OAB の内接円を C_1，△LMN の外接円を C_2 とする。



(1) 円 C_1 の半径 r_1 と中心 P_1 の座標を求めよ。

(2) 円 C_2 の半径 r_2 と中心 P_2 の座標を求めよ。

(3) 円 C_1 と円 C_2 が接することを示せ。

(1) 円 C_1 の中心 P_1 は第1象限にあり，C_1 が x 軸と y 軸に接するから，P_1 の座標は $(r_1,\ r_1)$ である。

$$\mathrm{OA}=3,\quad \mathrm{OB}=4,\quad \mathrm{AB}=\sqrt{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

$\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{OAP_1}+\triangle\mathrm{OBP_1}+\triangle\mathrm{ABP_1}$ であるから

$$\frac{1}{2}\cdot3\cdot4=\frac{1}{2}\cdot3\cdot r_1+\frac{1}{2}\cdot4\cdot r_1+\frac{1}{2}\cdot5\cdot r_1$$

これを解いて　$r_1=1$

よって，中心 P_1 の座標は　(1, 1)

(2) 中点連結定理により　$\mathrm{LN}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}=\frac{1}{2}\cdot5=\frac{5}{2}$

△LMN は ∠LMN=90° の直角三角形であるから，外接円 C_2 の中心 P_2 は辺 LN の中点である。

よって，C_2 の半径 r_2 は　$r_2=\frac{1}{2}\mathrm{LN}=\frac{5}{4}$

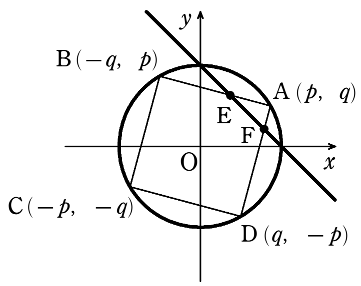
中心 P_2 の座標は　$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+0\right),\ \frac{0+2}{2}\right)$　すなわち　$\left(\frac{3}{4},\ 1\right)$

(3) $\mathrm{P_1P_2}=\sqrt{\left(1-\frac{3}{4}\right)^2+(1-1)^2}=\frac{1}{4}$，　$|r_1-r_2|=\left|1-\frac{5}{4}\right|=\frac{1}{4}$

円 C_1，C_2 の中心間の距離 $\mathrm{P_1P_2}$ と半径の差 $|r_1-r_2|$ が等しいから，円 C_1 と円 C_2 は接する。

$\boxed{2}$［2011 金沢大］

座標平面上に A$(p,\ q)$，B$(-q,\ p)$，C$(-p,\ -q)$，D$(q,\ -p)$ を頂点とする正方形がある。ただし，$p>0$，$q>0$，$p^2+q^2=1$ とする。また，直線 AB，AD が直線 $x+y=1$ と交わる点をそれぞれ E$(r,\ s)$，F$(t,\ u)$ とする。



(1) 直線 AB，AD の方程式を p，q を用いて表せ。

(2) r，s，t，u を p，q を用いて表せ。

(3) $k=p+q$ とおくとき，pq を k の式で表せ。また，$k\leqq\sqrt{2}$ を示せ。

(4) $st-ru$ を k の式で表せ。また，$st-ru$ の最小値を求めよ。

(1) 直線 AB の方程式は

$$(p-q)(x-p)-(-q-p)(y-q)=0$$

整理すると　$(p-q)x+(p+q)y=p^2+q^2$

$p^2+q^2=1$ であるから　$(p-q)x+(p+q)y=1$　…… ①

直線 AD の方程式は

$$(-p-q)(x-p)-(q-p)(y-q)=0$$

整理すると　$(p+q)x-(p-q)y=p^2+q^2$

$p^2+q^2=1$ であるから　$(p+q)x-(p-q)y=1$　…… ②

(2) $x+y=1$ …… ③　とする。

①−③×$(p+q)$ から　$-2qx=-p-q+1$

①−③×$(p-q)$ から　$2qy=-p+q+1$

$q\neq0$ であるから　$x=\frac{p+q-1}{2q}$，$y=\frac{-p+q+1}{2q}$

②+③×$(p-q)$ から　$2px=p-q+1$

②−③×$(p+q)$ から　$-2py=-p-q+1$

$p\neq0$ であるから　$x=\frac{p-q+1}{2p}$，$y=\frac{p+q-1}{2p}$

よって　$r=\frac{p+q-1}{2q}$，$s=\frac{-p+q+1}{2q}$，$t=\frac{p-q+1}{2p}$，$u=\frac{p+q-1}{2p}$

(3) $k=p+q$ から　$k^2=p^2+q^2+2pq$

よって　$pq=\frac{k^2-(p^2+q^2)}{2}=\frac{k^2-1}{2}$

$p=\cos\theta$，$q=\sin\theta$ $(0°<\theta<90°)$ とおくと

$$k=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+45°)$$

$45°<\theta+45°<135°$ であるから

$$\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}<\sqrt{2}\sin(\theta+45°)\leqq\sqrt{2}\cdot1$$

したがって　$1<k\leqq\sqrt{2}$

(4)
$$st-ru=\frac{-(p-q)+1}{2q}\cdot\frac{(p-q)+1}{2p}-\frac{p+q-1}{2q}\cdot\frac{p+q-1}{2p}$$
$$=\frac{1-(p-q)^2}{4pq}-\frac{(p+q-1)^2}{4pq}$$
$$=\frac{2(p+q)-2(p^2+q^2)}{4pq}=\frac{(p+q)-1}{2pq}$$
$$=\frac{k-1}{k^2-1}=\frac{k-1}{(k+1)(k-1)}=\frac{1}{k+1}$$

$1<k\leqq\sqrt{2}$ から　$\frac{1}{k+1}\geqq\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$

よって，$st-ru$ の最小値は　$\sqrt{2}-1$

金沢大学入試問題2011

$\boxed{3}$ ［2011 金沢大］

座標平面上に，円 $C: x^2+y^2-2x-6y+5=0$ と直線 $\ell: x+3y=15$ がある。また，2 点 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ -1)$ を結ぶ線分の中点を E とする。

(1) 円 C の中心の座標と半径を求めよ。

(2) 円 C と直線 ℓ の共有点の座標を求めよ。

(3) 座標平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に対して，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2-2\mathrm{EP}^2$ の値を求めよ。

(4) 連立不等式 $\begin{cases} x^2+y^2-2x-6y+5\leqq 0 \\ x+3y\geqq 15 \end{cases}$ の表す領域を D とする。点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ がこの領域 D を動くとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ の最大値を求めよ。

(1) $x^2+y^2-2x-6y+5=0$ ……① から $(x-1)^2+(y-3)^2=5$

よって，円 C の中心は $(1,\ 3)$， 半径は $\sqrt{5}$

(2) $x+3y=15$ から $x=-3y+15$ ……②

② を ① に代入して $(-3y+15)^2+y^2-2(-3y+15)-6y+5=0$

整理すると $y^2-9y+20=0$ すなわち $(y-4)(y-5)=0$

よって $y=4,\ 5$

② から，$y=4$ のとき $x=3$ $y=5$ のとき $x=0$

したがって，求める共有点の座標は $(3,\ 4)$，$(0,\ 5)$

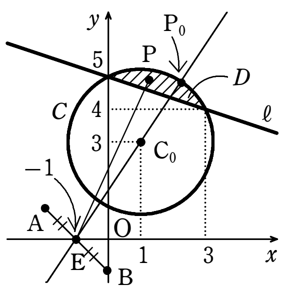
(3) 線分 AB の中点 E の座標は $\mathrm{E}\left(\dfrac{-2+0}{2},\ \dfrac{1+(-1)}{2}\right)$

すなわち $\mathrm{E}(-1,\ 0)$

よって
$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2-2\mathrm{EP}^2&=\{(x+2)^2+(y-1)^2\}+\{x^2+(y+1)^2\}-2\{(x+1)^2+y^2\}\\&=(x^2+4x+y^2-2y+5)+(x^2+y^2+2y+1)\\&\qquad-2(x^2+2x+y^2+1)\\&=4\end{aligned}$$

(4) 領域 D は，右の図の斜線部分のようになる。

ただし，境界線を含む。



また，(3) より $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=2\mathrm{EP}^2+4$

よって，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ が最大となるのは，EP^2 が最大となるとき，すなわち領域 D を動く点 P が点 E から最も遠くなるときである。

円 C の中心 $(1,\ 3)$ を C_0 とし，直線 EC_0 と円 C の交点のうち，点 E から遠い方の交点を P_0 とする。

直線 EC_0 の傾きは $\dfrac{3-0}{1-(-1)}=\dfrac{3}{2}$

点 E と点 $(0,\ 5)$ を通る直線の傾きは $\dfrac{5-0}{0-(-1)}=5$

点 E と点 $(3,\ 4)$ を通る直線の傾きは $\dfrac{4-0}{3-(-1)}=1$

$1<\dfrac{3}{2}<5$ であるから，点 P_0 は領域 D の点である。

よって，点 P が領域 D を動くとき
$$\begin{aligned}\mathrm{EP}\leqq\mathrm{EP}_0=\mathrm{EC}_0+\mathrm{C}_0\mathrm{P}_0&=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(3-0)^2}+\sqrt{5}\\&=\sqrt{13}+\sqrt{5}\end{aligned}$$

したがって，求める $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ の最大値は
$$\begin{aligned}2\mathrm{EP}_0{}^2+4&=2(\sqrt{13}+\sqrt{5})^2+4\\&=40+4\sqrt{65}\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ ［2011 金沢大］

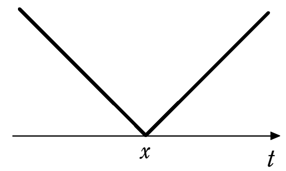
実数 x に対して，関数 $f(x)$ を $f(x)=\displaystyle\int_0^2|t-x|dt$ とおく。

(1) 関数 $y=f(x)$ を求め，そのグラフをかけ。

(2) $y=f(x)$ の接線で傾きが 1 のものを ℓ とする。ℓ の方程式を求めよ。

(3) 直線 $x=-1$，接線 ℓ，曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1) $|t-x|=\begin{cases} t-x & (t>x) \\ -(t-x) & (t\leqq x) \end{cases}$

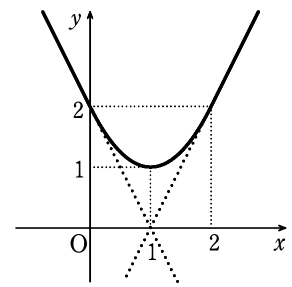


[1] $x\leqq 0$ のとき
$$\int_0^2|t-x|dt=\int_0^2(t-x)dt=\left[\frac{1}{2}t^2-xt\right]_0^2=2-2x$$

[2] $0<x<2$ のとき
$$\begin{aligned}\int_0^2|t-x|dt&=\int_0^x\{-(t-x)\}dt+\int_x^2(t-x)dt\\&=-\left[\frac{1}{2}t^2-xt\right]_0^x+\left[\frac{1}{2}t^2-xt\right]_x^2\\&=-\left(\frac{1}{2}x^2-x^2\right)+(2-2x)-\left(\frac{1}{2}x^2-x^2\right)\\&=x^2-2x+2=(x-1)^2+1\end{aligned}$$

[3] $x\geqq 2$ のとき
$$\int_0^2|t-x|dt=\int_0^2\{-(t-x)\}dt=2x-2$$

[1]～[3] から
$$f(x)=\begin{cases} -2x+2 & (x\leqq 0) \\ (x-1)^2+1 & (0<x<2) \\ 2x-2 & (x\geqq 2) \end{cases}$$



$y=f(x)$ のグラフは，右の図のようになる。

(2) 傾き 1 の接線は $1<x<2$ の範囲でグラフに接する。

$1<x<2$ のとき $f'(x)=2x-2$

$2x-2=1$ とすると $x=\dfrac{3}{2}$

また $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-2\cdot\dfrac{3}{2}+2=\dfrac{5}{4}$

よって，ℓ の方程式は $y-\dfrac{5}{4}=x-\dfrac{3}{2}$ すなわち $y=x-\dfrac{1}{4}$

(3) 求める面積は
$$\begin{aligned}&\int_{-1}^0\left\{(-2x+2)-\left(x-\frac{1}{4}\right)\right\}dx+\int_0^{\frac{3}{2}}\left\{(x^2-2x+2)-\left(x-\frac{1}{4}\right)\right\}dx\\&=\int_{-1}^0\left(-3x+\frac{9}{4}\right)dx+\int_0^{\frac{3}{2}}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2dx\\&=\left[-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^3\right]_0^{\frac{3}{2}}=\frac{15}{4}+\frac{9}{8}=\frac{39}{8}\end{aligned}$$

金沢大学入試問題2011

$\boxed{5}$［2011 金沢大］

$f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$ とする。

(1)　$x>0$ のとき，不等式 $e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$ が成り立つことを示せ。

(2)　(1) の不等式を用いて $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ であることを示せ。また，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)$ を調べよ。

(3)　a を実数の定数とするとき，方程式 $f(x)=a$ の異なる実数解の個数を調べよ。

(4)　方程式 $\{f(x)\}^3-2f(x)+1=0$ の異なる実数解の個数を求めよ。

(1)　$g(x)=e^x-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)$ とおく。

$g'(x)=e^x-1-x,\quad g''(x)=e^x-1$

よって，$x>0$ のとき $g''(x)>0$ より，$x>0$ で $g'(x)$は単調に増加し，$g'(0)=0$ であるから，$x>0$ のとき　$g'(x)>0$

ゆえに，$x>0$ で $g(x)$ は単調に増加し，$g(0)=0$ であるから，$x>0$ のとき　$g(x)>0$

したがって，$x>0$ のとき　$e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$

(2)　(1) から，$x>0$ のとき　$e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}>\dfrac{x^2}{2}$

逆数をとると　$0<\dfrac{1}{e^x}<\dfrac{2}{x^2}$

各辺に $x+1\ (>0)$ を掛けると　$0<\dfrac{x+1}{e^x}<\dfrac{2(x+1)}{x^2}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2(x+1)}{x^2}=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{e^x}=0$

すなわち　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$

次に，$x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$であるから

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{e^x}=\lim_{t\to\infty}\frac{1-t}{e^{-t}}=\lim_{t\to\infty}(1-t)e^t=-\infty$$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

(3)　方程式 $f(x)=a$ の異なる実数解の個数は，関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数に一致する。

$f'(x)=\dfrac{e^x-(x+1)e^x}{e^{2x}}=-\dfrac{x}{e^x}$

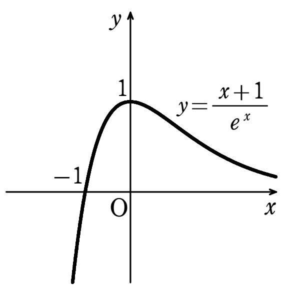
x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	1	↘

$f'(x)=0$ とすると　$x=0$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

(2) から　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。



直線 $y=a$ との共有点の個数を調べて，求める実数解の個数は

$a>1$ のとき　0 個

$a=1$，$a\leqq0$ のとき　1 個

$0<a<1$ のとき　2 個

(4)　$\{f(x)\}^3-2f(x)+1=0$ から

$\{f(x)-1\}[\{f(x)\}^2+f(x)-1]=0$

よって　$f(x)=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

(3) から，$f(x)=1$ の解は　1 個

$f(x)=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ の解は，$0<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<1$ であるから　2 個

$f(x)=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ の解は，$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}<0$ であるから　1 個

また，(3) のグラフから，異なる 2 つの実数 p，q に対し，$f(x)=p$ と $f(x)=q$ が同じ実数解をもつことはない。

したがって，求める個数は　4 個

$\boxed{6}$［2011 金沢大］

(1)　$x\geqq0$ のとき，不等式 $1-\cos\dfrac{x}{2}\leqq\dfrac{x^2}{8}$ を示せ。

(2)　$I_n=\displaystyle\int_0^2x^ne^xdx\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とおく。I_1 の値を求めよ。

更に，等式 $I_n=2^ne^2-nI_{n-1}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$ を示せ。

(3)　I_2，I_3，I_4 および I_5 の値を求めよ。

(4)　不等式 $\displaystyle\int_0^4\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)e^{\sqrt{x}}dx\leqq-2e^2+30$ を示せ。

(1)　$f(x)=\dfrac{x^2}{8}+\cos\dfrac{x}{2}-1\ (x\geqq0)$ とすると

$f'(x)=\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}$，$f''(x)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\cos\dfrac{x}{2}$

$f''(x)\geqq0$ であるから，$f'(x)$ は単調に増加する。

また，$f'(0)=0$ であるから，$x\geqq0$ で　$f'(x)\geqq0$

よって，$x\geqq0$ で $f(x)$ は単調に増加し，$f(0)=0$ であるから　$f(x)\geqq0$

したがって　$1-\cos\dfrac{x}{2}\leqq\dfrac{x^2}{8}$

(2)　$$I_1=\int_0^2xe^xdx=\Big[xe^x\Big]_0^2-\int_0^2e^xdx=2e^2-\Big[e^x\Big]_0^2=e^2+1$$

また，$n=2,\ 3,\ 4\ \cdots\cdots$ のとき

$$I_n=\int_0^2x^ne^xdx=\Big[x^ne^x\Big]_0^2-\int_0^2nx^{n-1}e^xdx$$
$$=2^ne^2-nI_{n-1}$$

(3)　(2) から　$I_2=2^2e^2-2I_1=4e^2-2(e^2+1)=2e^2-2$

$I_3=2^3e^2-3I_2=8e^2-3(2e^2-2)=2e^2+6$

$I_4=2^4e^2-4I_3=16e^2-4(2e^2+6)=8e^2-24$

$I_5=2^5e^2-5I_4=32e^2-5(8e^2-24)=-8e^2+120$

(4)　$x\geqq0$ のとき　$e^{\sqrt{x}}>0$

よって，$x\geqq0$ のとき (1) から　$\left(1-\cos\dfrac{x}{2}\right)e^{\sqrt{x}}\leqq\dfrac{x^2}{8}e^{\sqrt{x}}$

ゆえに　$\displaystyle\int_0^4\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)e^{\sqrt{x}}dx\leqq\int_0^4\frac{x^2}{8}e^{\sqrt{x}}dx$

$\sqrt{x}=t$ とおくと　$x=t^2$　ゆえに　$dx=2tdt$

x	$0\to4$
t	$0\to2$

よって　$\displaystyle\int_0^4\frac{x^2}{8}e^{\sqrt{x}}dx=\int_0^2\frac{t^4}{8}e^t\cdot2tdt=\frac{1}{4}I_5$

ゆえに，(3) から

$$\int_0^4\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)e^{\sqrt{x}}dx\leqq-2e^2+30$$

金沢大学入試問題2011

$\boxed{7}$ [2011 金沢大]

(1) 自然数 n に対して，$\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx$ を求めよ。また

$$\frac{1}{n+1}<\log(n+1)-\log n<\frac{1}{n}$$

を示せ。

(2) 2 以上の自然数 n に対して，$\log(n+1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<1+\log n$ を示せ。

(3) 2 以上の自然数 n に対して，$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{ee^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{3}}\cdots\cdots e^{\frac{1}{k}}}>\frac{1}{e}\log(n+1)$ を示せ。

(1) $\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx=\Big[\log x\Big]_n^{n+1}=\log(n+1)-\log n$

$n\leqq x\leqq n+1$ において，$\frac{1}{n+1}\leqq\frac{1}{x}\leqq\frac{1}{n}$ であり，等号は常には成り立たないから

$$\int_n^{n+1}\frac{1}{n+1}dx<\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx<\int_n^{n+1}\frac{1}{n}dx$$

よって　$\frac{1}{n+1}<\log(n+1)-\log n<\frac{1}{n}$

(2) (1) で示した不等式から，自然数 k に対して

$$\log(k+1)-\log k<\frac{1}{k}\ \cdots\cdots ①$$

$$\frac{1}{k+1}<\log(k+1)-\log k\ \cdots\cdots ②$$

① から　$\sum_{k=1}^{n}\{\log(k+1)-\log k\}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

よって　$-\log 1+\log(n+1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

ゆえに　$\log(n+1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\ \cdots\cdots ③$

② から　$1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}<1+\sum_{k=1}^{n-1}\{\log(k+1)-\log k\}$

よって　$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<1-\log 1+\log n$

ゆえに　$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<1+\log n\ \cdots\cdots ④$

③，④ から　$\log(n+1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<1+\log n$

(3) ④ から，2 以上の自然数 k に対して

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}<1+\log k=\log ek$$

よって　$0<e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}}<ek$

ゆえに　$\frac{1}{ee^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{3}}\cdots\cdots e^{\frac{1}{k}}}>\frac{1}{ek}$

よって　$\frac{1}{e}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{ee^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{3}}\cdots\cdots e^{\frac{1}{k}}}>\frac{1}{e}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{ek}$

ゆえに　$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{ee^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{3}}\cdots\cdots e^{\frac{1}{k}}}>\frac{1}{e}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

よって，③ から

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{ee^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{3}}\cdots\cdots e^{\frac{1}{k}}}>\frac{1}{e}\log(n+1)$$

$\boxed{8}$ [2011 金沢大]

行列 $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}\sqrt{3}&-\sqrt{3}\\1&1\end{pmatrix}$ に対して，$B=P^{-1}AP$ とおく。

また，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，a_n，b_n を $\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ で定める。

(1) P^{-1} および B を求めよ。

(2) a_n，b_n を求めよ。

(3) 実数 x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。このとき $[(2+\sqrt{3})^n]=a_n-1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を示せ。また $c_n=(2+\sqrt{3})^n-[(2+\sqrt{3})^n]$ とするとき，$\lim_{n\to\infty}c_n$ の値を求めよ。

(1) $P^{-1}=\frac{1}{\sqrt{3}\cdot1-(-\sqrt{3})\cdot1}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}\\-1&\sqrt{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}\\-1&\sqrt{3}\end{pmatrix}$

$$B=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}\\-1&\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&-\sqrt{3}\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}2+\sqrt{3}&3+2\sqrt{3}\\-2+\sqrt{3}&-3+2\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&-\sqrt{3}\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}6+4\sqrt{3}&0\\0&-6+4\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2+\sqrt{3}&0\\0&2-\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

(2) $B^n=(P^{-1}AP)^n=P^{-1}A^nP$ であるから　$A^n=PB^nP^{-1}$

ここで，$p=2+\sqrt{3}$，$q=2-\sqrt{3}$ とおくと

$$\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=PB^nP^{-1}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sqrt{3}&-\sqrt{3}\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p^n&0\\0&q^n\end{pmatrix}\left\{\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}\\-1&\sqrt{3}\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}p^n&-\sqrt{3}q^n\\p^n&q^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}\\-1&\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}p^n+\sqrt{3}q^n&3p^n-3q^n\\p^n-q^n&\sqrt{3}p^n+\sqrt{3}q^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}p^n+\sqrt{3}q^n\\p^n-q^n\end{pmatrix}$$

ゆえに　$a_n=p^n+q^n=(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$，

$b_n=\frac{1}{\sqrt{3}}(p^n-q^n)=\frac{1}{\sqrt{3}}\{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n\}$

(3) A の各成分は整数であるから，A^n の各成分も整数である。

よって，a_n は整数である。

$a_n=(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ から　$(2+\sqrt{3})^n=a_n-(2-\sqrt{3})^n$

ここで，$0<2-\sqrt{3}<1$ であるから　$0<(2-\sqrt{3})^n<1$ …… ①

よって　$[(2+\sqrt{3})^n]=[a_n-(2-\sqrt{3})^n]=a_n-1$

また　$c_n=(2+\sqrt{3})^n-[(2+\sqrt{3})^n]=(2+\sqrt{3})^n-(a_n-1)=1-(2-\sqrt{3})^n$

① から　$\lim_{n\to\infty}(2-\sqrt{3})^n=0$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\{1-(2-\sqrt{3})^n\}=1$