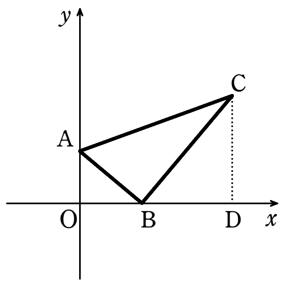
金沢大学入試問題2012

$\boxed{1}$［2012 金沢大］

O を原点とする座標平面に点 A$(0,\ \sin\theta)$，B$(\cos\theta,\ 0)$ がある。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。また，点 C を AC$=2$，$\angle$ABC$=\dfrac{\pi}{2}$ を満たす第 1 象限の点とする。さらに，点 C から x 軸に垂線 CD を下ろす。



(1)　AB，BC を求めよ。また，$\angle$OBA と $\angle$CBD および点 C の座標を θ を用いて表せ。

(2)　台形 AODC の面積を S とするとき，

$$S \leqq 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

を示せ。また，等号が成り立つとき，θ の値を求めよ。

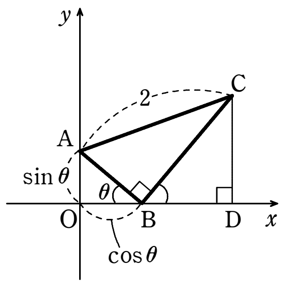
(3)　AO$+$CD$\leqq 2$ を示せ。また，等号が成り立つとき，θ の値を求めよ。

(1)　AB$=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$

$\angle$ABC$=\dfrac{\pi}{2}$ であるから，直角三角形 ABC において

$$\mathrm{BC}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$$

直角三角形 OAB において，AB$=1$，OA$=\sin\theta$，OB$=\cos\theta$ であるから　　$\angle\mathrm{OBA}=\theta$



よって　　$\angle\mathrm{CBD}=\pi-\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

ゆえに，点 C の x 座標は

$$\mathrm{OB}+\mathrm{BD}=\cos\theta+\mathrm{BC}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$$

点 C の y 座標は　　$\mathrm{BC}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sqrt{3}\cos\theta$

したがって，点 C の座標は　　$(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta,\ \sqrt{3}\cos\theta)$

(2)　$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{OD}(\mathrm{OA}+\mathrm{CD})=\dfrac{1}{2}(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)$

$$=\frac{1}{2}(4\sin\theta\cos\theta+\sqrt{3}\sin^2\theta+\sqrt{3}\cos^2\theta)$$

$$=\sin 2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0<2\theta<\pi$ であるから　　$0<\sin 2\theta\leqq 1$

よって　　$S\leqq 1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

等号が成り立つとき　　$2\theta=\dfrac{\pi}{2}$　　　ゆえに　　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

(3)　$\mathrm{AO}+\mathrm{CD}=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\dfrac{\pi}{3}<\theta+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5}{6}\pi$ であるから　　$\dfrac{1}{2}<\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq 1$

よって　　AO$+$CD$\leqq 2$

等号が成り立つとき　　$\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$　　　ゆえに　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$

$\boxed{2}$［2012 金沢大］

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1)　$\log_{10}\dfrac{2}{3}$，$\log_{10}\dfrac{1}{2}$ の値を求めよ。

(2)　$\left(\dfrac{2}{3}\right)^m\geqq\dfrac{1}{10}$，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\geqq\dfrac{1}{10}$ を満たす最大の自然数 m，n を求めよ。

(3)　連立不等式 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\left(\dfrac{1}{2}\right)^y\geqq\dfrac{1}{10}$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ の表す領域を座標平面に図示せよ。

(4)　$\left(\dfrac{2}{3}\right)^m\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\geqq\dfrac{1}{10}$ を満たす自然数 m と n の組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ。

(1)　$\log_{10}\dfrac{2}{3}=\log_{10}2-\log_{10}3=0.3010-0.4771=-0.1761$

$\log_{10}\dfrac{1}{2}=-\log_{10}2=-0.3010$

(2)　$\left(\dfrac{2}{3}\right)^m\geqq\dfrac{1}{10}$，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\geqq\dfrac{1}{10}$ の各辺の常用対数をとると

$$m\log_{10}\frac{2}{3}\geqq -1,\quad n\log_{10}\frac{1}{2}\geqq -1$$

(1) から　　　$-0.1761m\geqq -1$，$-0.3010n\geqq -1$

すなわち　　$0.1761m\leqq 1$ …… ①，$0.3010n\leqq 1$ …… ②

① を満たす最大の自然数 m は　　$m=5$

② を満たす最大の自然数 n は　　$n=3$

(3)　$\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\left(\dfrac{1}{2}\right)^y\geqq\dfrac{1}{10}$ の両辺の常用対数をとると

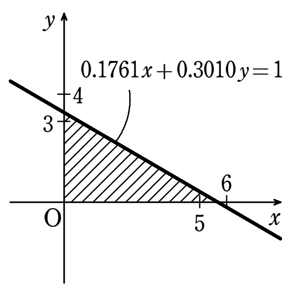
$$x\log_{10}\frac{2}{3}+y\log_{10}\frac{1}{2}\geqq -1$$

(1) から　　　$-0.1761x-0.3010y\geqq -1$

すなわち　　$0.1761x+0.3010y\leqq 1$

よって，求める領域は右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。



(4)　不等式から　　$0.1761m+0.3010n\leqq 1$

これを満たす自然数の組 m，n について，点 $(m,\ n)$ は (3) の領域内にある。

(2) より，直線 $0.1761x+0.3010y=1$ の y 切片は，3 より大きく 4 より小さいから

$$1\leqq n\leqq 3$$

$n=1$ のとき　　$0.1761m\leqq 0.699$　　　これを満たす自然数 m は　$m=1,\ 2,\ 3$

$n=2$ のとき　　$0.1761m\leqq 0.398$　　　これを満たす自然数 m は　$m=1,\ 2$

$n=3$ のとき　　$0.1761m\leqq 0.097$　　　これを満たす自然数 m は存在しない。

以上から　　$(m,\ n)=(1,\ 1),\ (2,\ 1),\ (3,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 2)$

$\boxed{3}$［2012 金沢大］

曲線 C：$y=|x^2-2x|$ と傾きが m の直線 ℓ：$y=mx$ について，次の問いに答えよ。

(1)　曲線 $y=-x^2+2x$ と ℓ が接する m の値を求めよ。

(2)　C と ℓ が原点以外の相異なる 2 点で交わるような m の値の範囲を求めよ。また，そのときの 2 つの交点の座標を m を用いて表せ。

(3)　m は (2) で求めた範囲にあるとする。$x\geqq 2$，$y\leqq mx$，$y\geqq|x^2-2x|$ で定まる部分の面積 S を m を用いて表せ。

(1)　$-x^2+2x=mx$ とすると　　$x^2+(m-2)x=0$

曲線 $y=-x^2+2x$ と ℓ が接するとき，この 2 次方程式が重解をもつから，判別式 D について　　$D=(m-2)^2=0$

よって　　$m=2$

(2)　$-x^2+2x=mx$ を解くと　　$x=0,\ 2-m$

$x^2-2x=mx$ を解くと　　$x=0,\ 2+m$

C と ℓ が原点以外の 2 点で交わる条件は

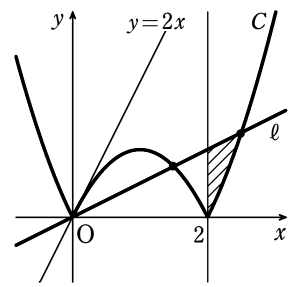
$0<2-m<2$ かつ $2<2+m$

よって　　$0<m<2$ かつ $0<m$

したがって　　$0<m<2$

このとき，2 つの交点の座標は

$(2-m,\ m(2-m))$，$(2+m,\ m(2+m))$



(3)　図および (2) の結果から

$$S=\int_2^{2+m}\{mx-(x^2-2x)\}dx=\int_2^{2+m}\{-x^2+(2+m)x\}dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{2+m}{2}x^2\right]_2^{2+m}=\left\{-\frac{(2+m)^3}{3}+\frac{(2+m)^3}{2}\right\}-\left\{-\frac{8}{3}+2(2+m)\right\}$$

$$=\frac{(m+2)^3}{6}-2m-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}m^3+m^2$$

$\boxed{4}$［2012 金沢大］

直線 $\ell:(x,\ y,\ z)=(5,\ 0,\ 0)+s(1,\ -1,\ 0)$ 上に点 P_0，

直線 $m:(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 2)+t(1,\ 0,\ 2)$ 上に点 Q_0 があり，$\overrightarrow{P_0Q_0}$ はベクトル $(1,\ -1,\ 0)$ と $(1,\ 0,\ 2)$ の両方に垂直である。

(1) P_0，Q_0 の座標を求めよ。

(2) $\left|\overrightarrow{P_0Q_0}\right|$ を求めよ。

(3) 直線 ℓ 上の点 P，直線 m 上の点 Q について，$\overrightarrow{PQ}$ を $\overrightarrow{PP_0}$，$\overrightarrow{P_0Q_0}$，$\overrightarrow{Q_0Q}$ で表せ。また，$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2=\left|\overrightarrow{PP_0}+\overrightarrow{Q_0Q}\right|^2+16$ であることを示せ。

(1) 点 P_0，Q_0 はそれぞれ直線 ℓ，m 上の点であるから，

$$\overrightarrow{OP_0}=(5,\ 0,\ 0)+s(1,\ -1,\ 0)=(s+5,\ -s,\ 0),$$

$$\overrightarrow{OQ_0}=(0,\ 0,\ 2)+t(1,\ 0,\ 2)=(t,\ 0,\ 2t+2) \quad \text{とおける。}$$

このとき $\overrightarrow{P_0Q_0}=\overrightarrow{OQ_0}-\overrightarrow{OP_0}=(t-s-5,\ s,\ 2t+2)$

これが，直線 ℓ，m の方向ベクトル $\overrightarrow{d_1}=(1,\ -1,\ 0)$，$\overrightarrow{d_2}=(1,\ 0,\ 2)$ の両方に垂直であるから $\overrightarrow{P_0Q_0}\cdot\overrightarrow{d_1}=0$，$\overrightarrow{P_0Q_0}\cdot\overrightarrow{d_2}=0$

よって $t-s-5-s=0$，$t-s-5+2(2t+2)=0$

すなわち $2s-t=-5$，$s-5t=-1$

これを解いて $s=-\dfrac{8}{3}$，$t=-\dfrac{1}{3}$

よって，$\overrightarrow{OP_0}=\left(\dfrac{7}{3},\ \dfrac{8}{3},\ 0\right)$，$\overrightarrow{OQ_0}=\left(-\dfrac{1}{3},\ 0,\ \dfrac{4}{3}\right)$ であるから，点 P_0，Q_0 の座標はそれぞれ $\left(\dfrac{7}{3},\ \dfrac{8}{3},\ 0\right)$，$\left(-\dfrac{1}{3},\ 0,\ \dfrac{4}{3}\right)$

(2) (1) から $\overrightarrow{P_0Q_0}=\left(-\dfrac{8}{3},\ -\dfrac{8}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{4}{3}(-2,\ -2,\ 1)$

よって $\left|\overrightarrow{P_0Q_0}\right|=\dfrac{4}{3}\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+1^2}=4$

(3) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PP_0}+\overrightarrow{P_0Q_0}+\overrightarrow{Q_0Q}$

よって
$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2=\left|(\overrightarrow{PP_0}+\overrightarrow{Q_0Q})+\overrightarrow{P_0Q_0}\right|^2$$
$$=\left|\overrightarrow{PP_0}+\overrightarrow{Q_0Q}\right|^2+(\overrightarrow{PP_0}+\overrightarrow{Q_0Q})\cdot\overrightarrow{P_0Q_0}+\left|\overrightarrow{P_0Q_0}\right|^2$$

ここで，$\overrightarrow{PP_0}/\!/\overrightarrow{d_1}$，$\overrightarrow{Q_0Q}/\!/\overrightarrow{d_2}$ であるから，(1) より

$$\overrightarrow{PP_0}\perp\overrightarrow{P_0Q_0},\quad \overrightarrow{Q_0Q}\perp\overrightarrow{P_0Q_0}$$

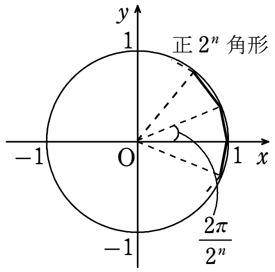
ゆえに $(\overrightarrow{PP_0}+\overrightarrow{Q_0Q})\cdot\overrightarrow{P_0Q_0}=\overrightarrow{PP_0}\cdot\overrightarrow{P_0Q_0}+\overrightarrow{Q_0Q}\cdot\overrightarrow{P_0Q_0}=0$

また，(2) より $\left|\overrightarrow{P_0Q_0}\right|^2=4^2=16$

したがって $\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2=\left|\overrightarrow{PP_0}+\overrightarrow{Q_0Q}\right|^2+16$

$\boxed{5}$［2012 金沢大］

半径 1 の円に内接する正 2^n 角形 ($n\geqq 2$) の面積を S_n，周の長さを L_n とする。次の問いに答えよ。



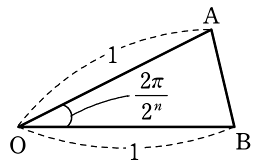
(1) $S_n=2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}$，$L_n=2^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$ を示せ。

(2) $\dfrac{S_n}{S_{n+1}}=\cos\dfrac{\pi}{2^n}$，$\dfrac{S_n}{L_n}=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ を示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}\right)$ を求めよ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2^n\cdot\frac{S_2}{L_2}\cdot\frac{S_3}{L_3}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{S_n}{L_n}\right)$ を求めよ。

(1) 正 2^n 角形を 2^n 等分したうちの 1 つは，右の図の △OAB のようになる。



△OAB の面積は $\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\dfrac{2\pi}{2^n}=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}$

線分 AB の長さは $2\mathrm{OA}\sin\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\pi}{2^n}\right)=2\sin\dfrac{\pi}{2^n}$

よって $S_n=2^n\cdot\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}=2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}$

$$L_n=2^n\cdot 2\sin\frac{\pi}{2^n}=2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^n}$$

(2) (1) から
$$\frac{S_n}{S_{n+1}}=\frac{2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}}{2^n\sin\dfrac{\pi}{2^n}}=\frac{\sin\left(2\cdot\dfrac{\pi}{2^n}\right)}{2\sin\dfrac{\pi}{2^n}}=\frac{2\sin\dfrac{\pi}{2^n}\cos\dfrac{\pi}{2^n}}{2\sin\dfrac{\pi}{2^n}}=\cos\frac{\pi}{2^n}$$

$$\frac{S_n}{L_n}=\frac{2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}}{2^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2^n}}=\frac{\sin\left(2\cdot\dfrac{\pi}{2^n}\right)}{2^2\sin\dfrac{\pi}{2^n}}=\frac{2\sin\dfrac{\pi}{2^n}\cos\dfrac{\pi}{2^n}}{2^2\sin\dfrac{\pi}{2^n}}=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2^n}$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2^{n-1}}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}}{\dfrac{\pi}{2^{n-1}}}\cdot\pi=\pi \quad\cdots\cdots ①$$

(2) から
$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{S_2}{S_3}\cdot\frac{S_3}{S_4}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{S_n}{S_{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{S_2}{S_{n+1}}$$

① より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{n+1}=\pi$ であるから，求める極限は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_2}{S_{n+1}}=\frac{2\sin\dfrac{\pi}{2}}{\pi}=\frac{2}{\pi}$

(4) (2) から

$$\lim_{n\to\infty}\left(2^n\cdot\frac{S_2}{L_2}\cdot\frac{S_3}{L_3}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{S_n}{L_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2^n\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2^2}\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdot\cdots\cdots\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2^n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(2^n\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}\right)$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}\right)$$
$$=2\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{4}{\pi}$$

$\boxed{6}$［2012 金沢大］

$n \geqq 3$ とする。1 個のサイコロを n 回振る。この n 回の試行のうちで 6 の目がちょうど 2 回，しかも続けて出る確率を p_n とする。

(1)　p_3，p_4 を求めよ。

(2)　p_n を求め，$p_{n+1}-\dfrac{5}{6}p_n=\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$ であることを示せ。

(3)　$s_n=p_3+p_4+\cdots\cdots+p_n$ として，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}s_n$ を求めよ。ただし，必要ならば，$|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ であることは使ってよい。

6 の目を○，6 以外の目を×で表すとする。

(1)　3 回の試行のうちで 6 の目がちょうど 2 回続けて出るのは，

○○×，×○○

の場合があり，確率はともに $\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)$ である。

よって　$p_3=\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)\times 2=\dfrac{5}{108}$

4 回の試行のうちで 6 の目がちょうど 2 回続けて出るのは，

○○××，×○○×，××○○

の場合があり，確率はいずれも $\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^2$ である。

よって　$p_4=\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^2\times 3=\dfrac{25}{432}$

(2)　n 回の試行のうちで 6 の目がちょうど 2 回続けて出るのは，

○○××……××
×○○×……××
××○○……××
……………………
×××× ……○○

の $(n-1)$ 通りあり，確率はすべて $\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-2}$

よって　$p_n=\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-2}\times(n-1)=\dfrac{n-1}{36}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-2}$

ゆえに　$p_{n+1}-\dfrac{5}{6}p_n=\dfrac{n}{36}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}-\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{n-1}{36}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-2}=\left(\dfrac{n}{36}-\dfrac{n-1}{36}\right)\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$

$=\dfrac{1}{36}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$

したがって　$p_{n+1}-\dfrac{5}{6}p_n=\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$

(3)　(2) から　$\displaystyle\sum_{k=3}^{n-1}\left(p_{k+1}-\frac{5}{6}p_k\right)=\sum_{k=3}^{n-1}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$

(左辺)$=\left(p_4-\dfrac{5}{6}p_3\right)+\left(p_5-\dfrac{5}{6}p_4\right)+\cdots\cdots+\left(p_n-\dfrac{5}{6}p_{n-1}\right)$

$=-\dfrac{5}{6}p_3+\dfrac{1}{6}p_4+\cdots\cdots+\dfrac{1}{6}p_{n-1}+p_n$

$=\dfrac{1}{6}(p_3+p_4+\cdots\cdots+p_n)-p_3+\dfrac{5}{6}p_n=\dfrac{1}{6}s_n-p_3+\dfrac{5}{6}p_n$

(右辺)$=\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^2\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-3}}{1-\dfrac{5}{6}}=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^2\left\{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-3}\right\}$

$=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^2-\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$

ゆえに　$\dfrac{1}{6}s_n-p_3+\dfrac{5}{6}p_n=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^2-\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$

両辺に 6 を掛けると　$s_n-6p_3+5p_n=\dfrac{25}{36}-\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$

よって　$s_n=\dfrac{25}{36}-\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}+6p_3-5p_n$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n$ について

$p_n=\dfrac{n-1}{36}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-2}=\dfrac{n-1}{25}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n=\dfrac{1}{25}n\left(\dfrac{5}{6}\right)^n-\dfrac{1}{25}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

$n\to\infty$ のとき，$n\left(\dfrac{5}{6}\right)^n\to 0$，$\left(\dfrac{5}{6}\right)^n\to 0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n=0$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{25}{36}+6p_3=\frac{25}{36}+6\cdot\frac{5}{108}=\frac{35}{36}$

$\boxed{7}$［2012 金沢大］

(1)　$f(t)$ を $0\leqq t\leqq 1$ で連続な関数とする。$\tan x=t$ とおいて，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}dx=\int_0^1 f(t)\,dt$$

であることを示せ。

(2)　(1) を用いて，0 以上の整数 n に対し，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^n x}{\cos^2 x}dx$ の値を求めよ。また，

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx\leqq\frac{1}{n+1}$ を示せ。

(3)　0 以上の整数 n と $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ を満たす x に対し，

$$\frac{1-\tan^2 x+\tan^4 x-\cdots\cdots+(-1)^n\tan^{2n}x}{\cos^2 x}=1-(-1)^{n+1}\tan^{2(n+1)}x$$

であることを示せ。

(4)　(2) と (3) を用いて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{2k+1}$ の値を求めよ。

(1)　$\tan x=t$ とおくと　$\dfrac{1}{\cos^2 x}dx=dt$

x	$0\to\dfrac{\pi}{4}$
t	$0\to 1$

よって　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}dx=\int_0^1 f(t)\,dt$

(2)　(1) から　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^n x}{\cos^2 x}dx=\int_0^1 t^n dt=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$　…… ①

また，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\cos x\leqq 1$ であるから　$\dfrac{1}{2}\leqq\cos^2 x\leqq 1$

ゆえに　$\dfrac{1}{\cos^2 x}\geqq 1$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$0\leqq\tan x\leqq 1$ であるから　$\tan^n x\geqq 0$

よって，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ において　$\tan^n x\leqq\dfrac{\tan^n x}{\cos^2 x}$

ゆえに　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^n x}{\cos^2 x}dx$

① から　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx\leqq\frac{1}{n+1}$　…… ②

(3)　$\tan^2 x\geqq 0$ であるから　$-\tan^2 x\neqq 1$

よって

$$\frac{1-\tan^2 x+\tan^4 x-\cdots\cdots+(-1)^n\tan^{2n}x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}\times\frac{1-(-\tan^2 x)^{n+1}}{1-(-\tan^2 x)}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}\times\frac{1-(-1)^{n+1}(\tan^2 x)^{n+1}}{1+\tan^2 x}$$

$$=1-(-1)^{n+1}\tan^{2(n+1)}x$$

(4) $I_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{2k+1}$ とすると

$$I_n=\frac{1}{2\cdot 0+1}-\frac{1}{2\cdot 1+1}+\frac{1}{2\cdot 2+1}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}$$

① から

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^4 x}{\cos^2 x}dx-\cdots\cdots+(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^{2n} x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan^2 x+\tan^4 x-\cdots\cdots+(-1)^n\tan^{2n} x}{\cos^2 x}dx$$

よって，(3) から

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\{1-(-1)^{n+1}\tan^{2(n+1)} x\}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx+(-1)^{n+2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2(n+1)} x\,dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+(-1)^{n+2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2(n+1)} x\,dx$$

ゆえに　$\left|I_n-\frac{\pi}{4}\right|=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2(n+1)} x\,dx$

② より，$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2(n+1)} x\,dx\leqq\frac{1}{2(n+1)+1}$ であるから　$\left|I_n-\frac{\pi}{4}\right|\leqq\frac{1}{2n+3}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+3}=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}I_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{2k+1}=\frac{\pi}{4}$