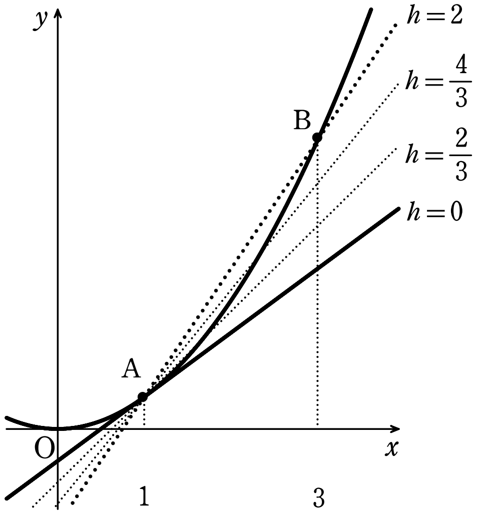
平均変化率と導関数

★$y=x^2$ のグラフにおいて，

$x=1$ から 3 まで変化するときの平均変化率を考えると，



x	$1 \rightarrow 3$	$(1+h)$
y	$1 \rightarrow 9$	$(1+h)^2$

上表より，

平均変化率$=\dfrac{9-1}{3-1}=4$ ←直線ABの傾き

<$x=1$ から 3 までの**平均の速さ**>

まず，$x=1$ から $1+h$ まで変化するときの

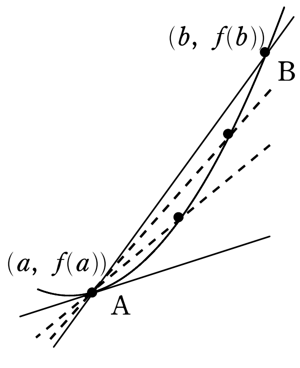
平均変化率$=\dfrac{(1+h)^2-1}{(1+h)-1}=\dfrac{2h+h^2}{h}=2+h$

次に，$x=1$ における瞬間の変化率を考えるためには，点Bを点Aに限りなく近づければよい．つまり，2 点A，Bの幅 h を限りなく 0 に近づければよい．　<$x=1$ における**瞬間の速さ**>

$x=1$ における(瞬間)**変化率**$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^2-1}{(1+h)-1}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2h+h^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2+h)=2$

→ これを，**微分係数**と呼ぶ．

一般に，$y=f(x)$ において，$x=a$ から b まで変化するときの平均変化率は，



平均変化率 $=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$：直線ABの傾き

(瞬間)**変化率**$=\lim\limits_{b\to a}\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$　$b=a+h$ とおくと，

b を a に限りなく近づけることは幅 h を 0 に近づけること，

つまり，$b\to a$ は，幅 $h\to 0$ と同値だから，

微分係数$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)\cdots$①と表す。

これは，$y=f(x)$ 上の点A における接線の傾きである。

①の式で $a\Rightarrow x$ に置きかえたものを**導関数**という。

$$\boxed{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

『導関数$f'(x)$を求めなさい』のときはこの式を使う！

単に『微分しなさい』のときは次の公式を使う！

$$\boxed{(x^n)'=nx^{n-1} \qquad (\text{定数}c)'=0}$$

平均変化率と導関数

問１　導関数の定義に従って，関数 $f(x)=x^3$ を微分せよ。

解答 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$$

問２　$f'(a)$ が存在するとき，$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{3h}$ を $f'(a)$ で表せ.

【考え方】　$f'(a)$ の定義は　$\lim_{\square\to 0}\dfrac{f(a+\square)-f(a)}{\square}$

分母と分子の□が異なっているから，同じになるように変形する.

解答 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{3h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{2h}$

$$=\frac{2}{3}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}=\frac{2}{3}f'(a)$$ 答

問３　$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+5h)-f(x-3h)}{h}=\boxed{}f'(x)$ である。

解答 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+5h)-f(x-3h)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+5h)-f(x)-\{f(x-3h)-f(x)\}}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{5\times\frac{f(x+5h)-f(x)}{5h}+3\times\frac{f(x-3h)-f(x)}{-3h}\right\}$$

$$=5\lim_{h\to 0}\frac{f(x+5h)-f(x)}{5h}+3\lim_{h\to 0}\frac{f(x-3h)-f(x)}{-3h}$$

$$=5f'(x)+3f'(x)=8f'(x)$$