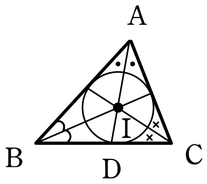
三角形の五心

○ **内心** I

三角形 の 3 つの内角の 2 等分線の交点。

$\boxed{\text{参考}}$ BD : DC＝AB : AC（角の 2 等分線の定理）

$S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$: r は内接円の半径

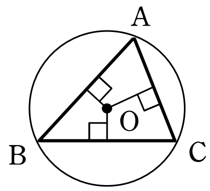


○ **外心** O

三角形の 3 つの辺の垂直二等分線の交点。

$\boxed{\text{参考}}$ OA＝OB＝OC＝R

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$: R は外接円の半径



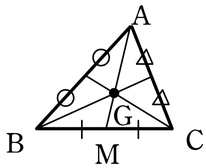
○ **重心** G

三角形の 3 つの辺の中点とその辺が向かい合う点を

それぞれ結んだ 3 つの**中線**の交点．その交点Gは，

各中線を 2 : 1 の比に内分する。

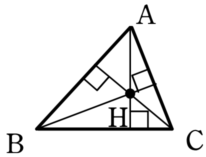
$\boxed{\text{参考}}$ $AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$: 中線(パップスの)定理



○ **垂心** H

三角形の 3 つの各頂点から対辺(またはその延長上)に

下ろした 3 つの垂線の交点。



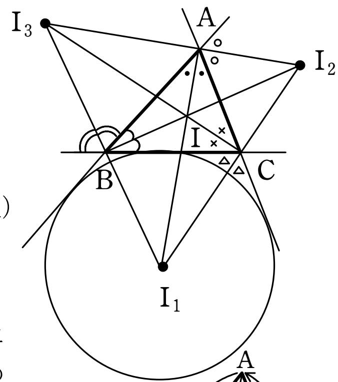
○ **傍心** I_1，I_2，I_3

三角形の 1 つの頂点における内角の 2 等分線と，

他の 2 つの頂点における外角の 2 等分線の交点。

$\boxed{\text{参考}}$ ∠Aの外角の 2 等分線と辺BCの延長との交点を

Dとすると，BD : DC＝AB : AC（角の 2 等分線の定理）



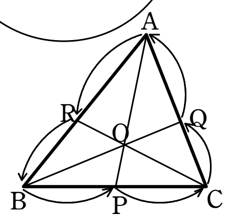
＜チェバの定理＞

△ABC の頂点 A，B，C と，この三角形の辺上にもまた

その延長上にもない点 O を結ぶ直線が，対辺またはその

延長と，それぞれ点 P，Q，R で交わるとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

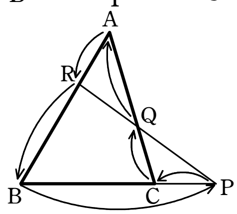


＜メネラウスの定理＞

△ABC の辺 BC，CA，AB またはその延長が，三角形

の頂点を通らない直線と，それぞれ点 P，Q，R で交わるとき

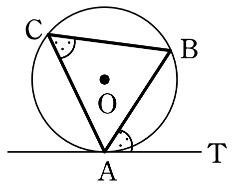
$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$



接弦定理，方べきの定理，中線定理

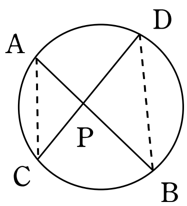
接線と弦の作る角（接弦定理）

円 O の弦 AB と，その端点 A における接線 AT が作る角 ∠BAT は，その角の内部に含まれる弧 AB に対する円周角 ∠ACB に等しい。

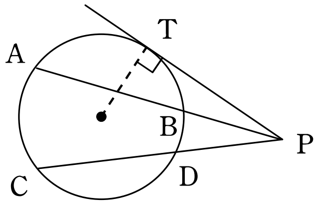


※　方べきの定理

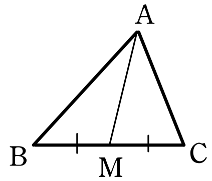
①　PA・PB＝PC・PD



②　$PA\cdot PB=PC\cdot PD=PT^2$



問　AB＝9，BC＝10，CA＝7，
点M が辺BC の中点のとき，線分AM の長さを求めよ。



注意：∠BAM＝∠CAM ではない！

①　中線(パップスの)定理を使う：AMを中線という

中線定理 $AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$ より，

$9^2+7^2=2(AM^2+5^2)$　$2(AM^2+5^2)=130$

$AM^2=40$　AM＞0 だから，　$AM=2\sqrt{10}$

②　余弦定理を使う

△ABC に余弦定理を用いると，$\cos B=\dfrac{9^2+10^2-7^2}{2\cdot 9\cdot 10}$　…ｉ)

また，△ABM に余弦定理を用いると，$\cos B=\dfrac{9^2+5^2-7^2}{2\cdot 9\cdot 5}$　…ⅱ)

ｉ)＝ⅱ) より，$AM^2=40$　AM＞0 だから，$AM=2\sqrt{10}$

別解　∠AMB＝θ とおくと，∠AMC＝$180°-\theta$ となる。

△AMB に余弦定理を用いると，$\cos\theta=\dfrac{AM^2+5^2-9^2}{2\cdot AM\cdot 5}$　…ｉ)

また，△AMC に余弦定理を用いると，$\cos(180°-\theta)=\dfrac{AM^2+5^2-7^2}{2\cdot AM\cdot 5}$　…ⅱ)

$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$ だから，ｉ)，ⅱ) より，$AM^2+25-81=-(AM^2+25-49)$

$AM^2=40$　AM＞0 だから，$AM=2\sqrt{10}$