解と係数の関係

1　2 次方程式 $ax^2+b+cx=0$ の 2 つの解を α, β とすると

$\boxed{\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}}$ が成り立つ。

証明　2 次方程式の解の公式より, $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ だから, $D=b^2-4ac$

として, $\alpha=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\beta=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$\alpha+\beta=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\times\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{(-b)^2-D}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

2　2 次方程式 $3x^2-5x-6=0$ の 2 つの解を α, β とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{-5}{3}=\frac{5}{3},\ \alpha\beta=\frac{-6}{3}=-2$$

3　3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の 3 つの解を α, β, γ とするとき,

$\boxed{\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}}$ が成り立つ。

証明　左辺の 3 次式は, 3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の 3 つの解 α, β, γ を用いて, $ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ と因数分解できる。

右辺 $=ax^3-a(\alpha+\beta+\gamma)x^2+a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-a\alpha\beta\gamma$

左辺と係数を比較すると,

$$b=-a(\alpha+\beta+\gamma),\ c=a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha),\ d=-a\alpha\beta\gamma$$

以上より,

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

$\Rightarrow$ **3 次方程式の解と係数の関係**という。

4　3 次方程式 $x^3-x^2+2x+1=0$ の 3 つの解を α, β, γ とするとき, $x^3-x^2+2x+1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ が成り立つ。このことを用いて, $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$ の値を求めよ。

解答　$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=(x-\alpha)\{x^2-(\beta+\gamma)x+\beta\gamma\}$

$$=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$$

よって　$x^3-x^2+2x+1=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$

ゆえに　$-1=-(\alpha+\beta+\gamma)$, $2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $1=-\alpha\beta\gamma$

したがって　$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=-1$