《高 校 数 学 公 式 集》

（不等式）

1．$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$，$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$　（相加･相乗平均，a，b，c は正または 0）

2．$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$　（コーシー･シュワルツの不等式）

（三角比）

3．$\dfrac{a}{\sin \mathrm{A}} = \dfrac{b}{\sin \mathrm{B}} = \dfrac{c}{\sin \mathrm{C}} = 2R$　（正弦定理）

4．$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \mathrm{A}$　（余弦定理）

5．$S = \dfrac{1}{2} bc \sin \mathrm{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$：（ヘロンの公式）$\left(s = \dfrac{1}{2}(a+b+c) \right)$

（図形と式）

6．数直線上の 2 点 x_1，x_2 を $m : n$ に内分および外分する点：

$$\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\quad \frac{-nx_1+mx_2}{m-n}$$

7．点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ との距離：$\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と平面 $ax+by+cz+d=0$ との距離：$\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

8．だ円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線：$\dfrac{x_1 x}{a^2} + \dfrac{y_1 y}{b^2} = 1$

9．双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線：$\dfrac{x_1 x}{a^2} - \dfrac{y_1 y}{b^2} = 1$

（ベクトルと行列）

10. 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$

11. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$　$(ad-bc \fallingdotseq 0)$

12. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$　E は単位行列，O は零行列

参考①点 $(x,\ y)$ を原点の周りに角 θ だけ回転した点を $(x',\ y')$ とすれば，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff x' + y'i = (\cos\theta + i\sin\theta)(x+yi)$$

②原点を通り x 軸とのなす角が θ である直線 ℓ に関する対称移動を表す行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

（複素数）

13. 極形式：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$　$(r = |z|,\ \theta = arg\ z)$

14. $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ に対し，

$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

15. ド･モアブルの定理：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ に対し，$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

（解と係数の関係）

16. $x^2 + px + q = 0$ の解が，α，β のとき，$\alpha+\beta = -p$，$\alpha\beta = q$

17. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の解が，α，β，γ のとき，

$\alpha+\beta+\gamma = -p$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = q$，$\alpha\beta\gamma = -r$

（対数）

18. ①　$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$　　②　$\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

③　$\log_a M^p = p\log_a M$　　④　$\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

（三角関数）

19. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$　（加法定理）

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

20. $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

21. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$　$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$　（２倍角の公式）

22. $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\}$　（積→和の変換公式）

$\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\}$

$\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$

23. $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$　（和→積の変換公式）

$\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

24. $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$　$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

（数列）

25. $S_n=\frac{1}{2}n(a+l)=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$　（$l=a+(n-1)d$）

26. 初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和：$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$　（$r\neq 1$）

27. $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$　　$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

（極限）

28. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e=2.71828\cdots$

29. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

（微分）

30. $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$

31. $x=f(y)$ のとき，$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$

32. $x=x(t)$，$y=y(t)$ のとき，$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$

33. $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$，$(\log x)'=\frac{1}{x}$

（積分）

34. $\int f(g(t))g'(t)dt=\int f(x)dx$

35. $\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx$

36. $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C$

37. $\int\log x\,dx=x\log x-x+C$

38. $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\pi a^2$,

$\int_0^a\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi}{4a}$,

$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

39. 回転体の体積：$V=\pi\int_a^b\{f(x)\}^2dx$

40. 曲線の長さ：$\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

（順列・組合せ）

41. ${}_n\mathrm{P}_r=\frac{n!}{(n-r)!}$，${}_n\mathrm{C}_r=\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_r+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$，$r\cdot{}_n\mathrm{C}_r=n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$　$(1\leqq r\leqq n-1)$

42. $(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r\,a^{n-r}b^r$：二項定理

（確率）

43. 確率 p の事象が n 回の試行中 r 回起こる確率：$P={}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r}$

44. 確率変数 X の平均(期待)値：$E(X)=\sum_{k=1}^{n}x_k p_k=m$

分散：$V(X)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2p_k=\sum_{k=1}^{n}x_k{}^2p_k-m^2$

標準偏差：$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

45. 二項分布 $B(n,\ p)$ については，$E(X)=np$，$V(X)=np(1-p)$

（極座標）

46. 媒介変数表示

円：$x^2+y^2=r^2$　$\Longleftrightarrow$　$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

だ円：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　$\Longleftrightarrow$　$x=a\cos\theta$，$y=b\sin\theta$

双曲線：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$　$\Longleftrightarrow$　$x=\frac{a}{\cos\theta}$，$y=b\tan\theta$

放物線：$y^2=4px$　$\Longleftrightarrow$　$x=pt^2$，$y=2pt$

47. 直交座標 $(x,\ y)$ を極座標 $(r,\ \theta)$ で表すと，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$，θ は始線とのなす角(偏角).

48. ２点 $\mathrm{A}(r_1,\ \theta_1)$，$\mathrm{B}(r_2,\ \theta_2)$ について，

$\mathrm{AB}=\sqrt{r_1{}^2+r_2{}^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$，$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}r_1r_2|\sin(\theta_1-\theta_2)|$