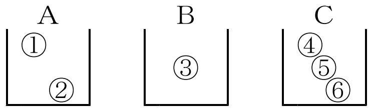
＜組分け・分配問題＞

※　６個の球を３個の箱に分ける方法について，以下の方法は何通りあるか。
ただし，空箱があってもよいものとする。

Ⅰ）　球も箱も区別するとき
Ⅱ）　球は区別するが，箱は区別しないとき
Ⅲ）　球は区別せず，箱を区別するとき
Ⅳ）　球も箱も区別しないとき

Ⅰ）　**６個の球も区別(①②③④⑤⑥と番号を付ける)し，３つの箱も区別(ＡＢＣ)するとき**



$\longrightarrow$　①　②　③　④　⑤　⑥
A　A　B　C　C　C　と考えると，

これは，A, B, Cの３個から重複を許して６個とる**重複順列**の１つとみることができる。

①　②　③　④　⑤　⑥
↓　↓　↓　↓　↓　↓
$\therefore$　$3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3$通り$=3^6=$729 通り

Ⅱ）　**６個の球は区別(①②③④⑤⑥と番号を付ける)するが，箱は区別しないとき**

その前に，個数が指定されている次の場合（Ⅰ）では個数指定なし）を考えると，
ｲ)　２個ずつ３つの箱A, B, Cに分ける方法は？
$${}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2=90 \text{ 通り}$$
ﾛ)　２個ずつ３つの組(箱は区別しない)に分ける方法は？

A　　B　　C
①　②　／　③　④　／　⑤　⑥
①　②　／　⑤　⑥　／　③　④
} ｲ)では別として数えるが，ﾛ)では区別がつかない。

$\therefore$　$90\div3!=15$ 通り

では，この問題を考えてみると，
1)　空箱が２つできるとき，
箱は区別しないので，(0，0，6)個に分けるしかない。よって，1 通り

2)　空箱が１つできるとき，
箱は区別しないので，$(0,\ y,\ z)$個，$y+z=6\ (y\leqq z)$ となるように分ければよい。
２つの箱に入れる入れ方は，箱を区別すると 2^6-2(片方に入ってしまう場合を引く)
箱の区別をはずすと $(2^6-2)\div2=31$ 通り

3)　空箱ができないとき，
箱は区別しないので，$(x,\ y,\ z)$個，$x+y+z=6\ (x\leqq y\leqq z)$ となるように分ければよい。その組は (1，1，4)，(1，2，3)，(2，2，2)のいずれか。球は区別するので，

$$\left.\begin{array}{l}(1,\ 1,\ 4)\ \to\ \dfrac{{}_6C_1\cdot{}_5C_1}{2!}=15\\(1,\ 2,\ 3)\ \to\ {}_6C_1\cdot{}_5C_2=60\\(2,\ 2,\ 2)\ \to\ \text{ﾛ)より，}15\text{ 通り}\end{array}\right\}\ \therefore\ 15+60+15=90\text{ 通り}$$

よって，求める答えは $1+31+90=$122 通り。

Ⅲ）　**６個の球は全く同じで区別がつかないが，箱を区別するとき**

○　○　○　○　○　○　←　区別なし(番号を付けない！)

これを３つの箱Ａ, Ｂ, Ｃに分ければよいから，○の間に｜を２本入れてやればよい。

	A	B	C	
○　｜　○　○　｜　○　○　○　⟷	1	2	3個	この二つは別！
○　｜　○　○　○　｜　○　○　⟷	1	3	2個	(箱は区別しているから)

結局，求める場合の数は，○６個，｜２個の合計８個を一列に並べる数と等しいから，８箇所のうちどの２箇所に｜を入れるかを決めればよい。その方法は，

$$ {}_8C_2=\frac{8\cdot 7}{2\cdot 1}=28\text{ 通り} $$

＜別解①＞　Ａ, Ｂ, Ｃの箱に入れる個数をそれぞれx，y，z(個)とすると，$x+y+z=6$，空箱があってもよいので，x，y，zは０以上の整数となる。これを満たす(x，y，z)の組をすべて求めればよい。

＜別解②＞　上の図を，$xyyzzz$

$xyyyzz$ などと考えると，x，y，z の異なる３種類から，重複を許して６個取る組合せ**（重複組合せ）**の数に等しい。

※　ｎ種類のものから重複を許して　→　${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$ を使って，

ｒ個取る組合せ。　${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2$ となる。

１　２　３　　　ｒ個

○　○　○　‥‥　○　をｎ種類に分けるのだから，(n－1)個の仕切りを入れればよい。r＋n－1 個のうち○ｒ個の場所を選べばよいから，${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$ となる。

Ⅳ）　**球も箱も区別しないとき**

Ａ, Ｂ, Ｃの箱に入れる個数をそれぞれx，y，z(個)とすると，$x+y+z=6$，空箱があってもよいので，x，y，zは０以上の整数となり，また，箱の区別もしないので，$x\leqq y\leqq z$（$x\geqq y\geqq z$ でもよいが)としてよい。

その組合せは，(x，y，z)＝(0，0，6)，(0，1，5)，(0，2，4)，(0，3，3)

(1，1，4)，(1，2，3)，(2，2，2) の 7 通り

では，次の問題にするとⅠ）～Ⅳ）の答えはそれぞれどうなるであろうか？

考えてみよう！！

【演習問題】　６個の球を３個の箱に分けるとき，以下の方法は何通りあるか。ただし，ぞれぞれの箱には少なくとも１つは入れるものとする。

Ⅰ）　**球も箱も区別するとき**

Ⅱ）　**球は区別するが，箱は区別しないとき**

Ⅲ）　**球は区別せず，箱を区別するとき**

Ⅳ）　**球も箱も区別しないとき**

＜略解＞

Ⅰ）　$3^6-\{{}_3C_2\times(2^6-2)+3\}=540$ 通り

Ⅱ）　前ページⅡ）の中の空箱がない場合だから，90 通り(あるいはⅠ)の答÷３！)

Ⅲ）　各箱に１個ずつ入れ，残りの３個を分ければよい。x，y，z の３種類から３個を取り出す重複組合せは ${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$ 通り

Ⅳ）　上のⅣ）のうち，空箱がない組合せは，{1，1，4}，{1，2，3}，{2，2，2} の 3 通り