$\boxed{1}$ 4直線・3直線が囲む領域と1次式の最大・最小

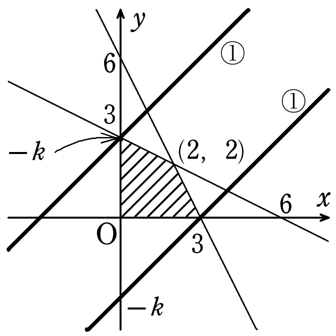
(1) x，y が 4 つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+2y \leqq 6$，$2x+y \leqq 6$ を満たすとき，$x-y$ の最大値，最小値を求めよ。

(2) x，y が連立不等式 $x+y \geqq 1$，$2x+y \leqq 6$，$x+2y \leqq 4$ を満たすとき，$2x+3y$ の最大値，最小値を求めよ。

解説

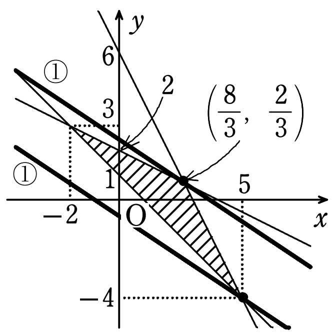
(1) $x-y=k$ とおくと　$y=x-k$

不等式の表す領域は図の斜線部分になり，
境界線を含む。
直線 $y=x-k$　…① と
この領域が共有点をもつとき
k が最大になるのは ① が点 $(3,\ 0)$ を通るときで，
このとき　$k=3-0=3$
k が最小になるのは ① が点 $(0,\ 3)$ を通るときで，
このとき　$k=0-3=-3$
ゆえに　$x=3$，$y=0$ のとき 最大値 3；$x=0$，$y=3$ のとき 最小値 -3



(2) $2x+3y=k$ とおくと　$y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{k}{3}$

不等式の表す領域は図の斜線部分になる。ただし，
境界線を含む。
直線 $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{k}{3}$　…① と
この領域が共有点をもつとき
k が最大となるのは ① が点 $\left(\dfrac{8}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$ を通るときで，
このとき　$k=2\times\dfrac{8}{3}+3\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{22}{3}$
k が最小となるのは ① が点 $(5,\ -4)$ を通るときで，
このとき　$k=2\times5+3\times(-4)=-2$
ゆえに　$x=\dfrac{8}{3}$，$y=\dfrac{2}{3}$ のとき 最大値 $\dfrac{22}{3}$；$x=5$，$y=-4$ のとき 最小値 -2

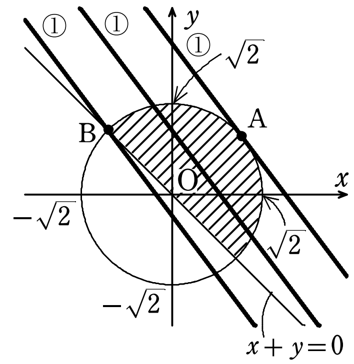


$\boxed{2}$ 円と直線が囲む領域と1次式の最大・最小

座標平面上で不等式 $x^2+y^2 \leqq 2$，$x+y \geqq 0$ で表される領域を A とする。点 $(x,\ y)$ が A を動くとき，1 次式 $4x+3y$ の最大値と最小値を求めよ。

解説

A は中心が原点，半径が $\sqrt{2}$ の円の内部と周，かつ
直線 $x+y=0$ とその上側で，図の斜線部分。ただし，
境界線を含む。
$4x+3y=k$　…① とおくと，
① は傾き $-\dfrac{4}{3}$，y 切片 $\dfrac{k}{3}$ の直線を表す。
よって，k は直線 ① が図の点 A を通るとき最大，
直線 ① が図の点 B を通るとき最小である。



[1]　A は直線 ① が円 $x^2+y^2=2$ に接する場合の接点
である。
$9x^2+(k-4x)^2=18$ から $25x^2-8kx+k^2-18=0$ の判別式 D について
$D/4=16k^2-25(k^2-18)=0$　よって　$-9k^2+25\cdot18=0$ から　$k=\pm5\sqrt{2}$
A の座標は $k=5\sqrt{2}$ から　$\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{5},\ \dfrac{3\sqrt{2}}{5}\right)$

[2]　B は直線 $y=-x$ と円 $x^2+y^2=2$ の交点で，座標は $(-1,\ 1)$
このとき　$k=-4+3=-1$

以上から，点 $\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{5},\ \dfrac{3\sqrt{2}}{5}\right)$ のとき 最大値 $5\sqrt{2}$，点 $(-1,\ 1)$ のとき 最小値 -1