$$\boxed{a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3}$$ ：《面積公式①》

$\boxed{1}$ ＜種々の面積公式＞

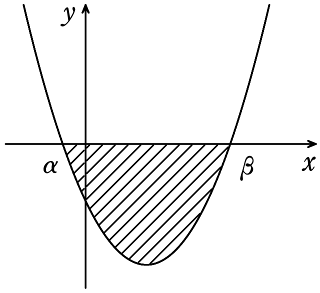
① $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \int_\alpha^\beta (x-\alpha)\{x-\alpha-(\beta-\alpha)\}\,dx$

$\displaystyle= \int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}\,dx$

$\displaystyle= \left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}-\frac{(\beta-\alpha)}{2}(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta$

$\displaystyle= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$

$\displaystyle= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$



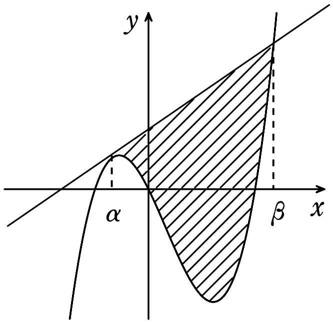
② $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx = \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2\{x-\alpha-(\beta-\alpha)\}\,dx$

$\displaystyle= \int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^3-(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\}\,dx$

$\displaystyle= \left[\frac{(x-\alpha)^4}{4}-\frac{(\beta-\alpha)}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\beta$

$\displaystyle= \frac{1}{4}(\beta-\alpha)^4-\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^4$

$\displaystyle= -\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$



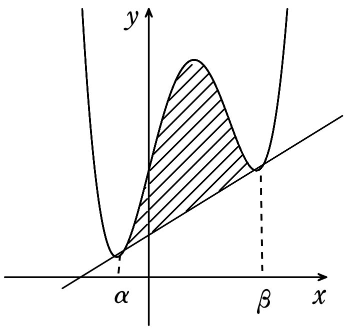
③ $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)^2\,dx = \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2\{(x-\alpha)^2-2(\beta-\alpha)(x-\alpha)+(\beta-\alpha)^2\}\,dx$

$\displaystyle= \int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^4-2(\beta-\alpha)(x-\alpha)^3+(\beta-\alpha)^2(x-\alpha)^2\}\,dx$

$\displaystyle= \left[\frac{(x-\alpha)^5}{5}-\frac{(\beta-\alpha)}{2}(x-\alpha)^4+\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^2(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\beta$

$\displaystyle= \frac{1}{5}(\beta-\alpha)^5-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^5+\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^5$

$\displaystyle= \frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5$



$$\boxed{a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3}$$ ：《面積公式①》

2

一般に，$I_{m,\ n}=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx$ を求めよう。

$$I_{m,\ n}=\left[\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}(x-\beta)^n\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}\cdot n(x-\beta)^{n-1}dx$$

$=-\dfrac{n}{m+1}I_{m+1,\ n-1}$ となる。この漸化式を n 回用いると，

$$I_{m,\ n}=(-1)^n\frac{n}{m+1}\cdot\frac{(n-1)}{m+2}\cdot\frac{(n-2)}{m+3}\cdots\frac{1}{m+n}I_{m+n,\ 0} \quad \cdots \quad ①$$

また，$I_{m+n,\ 0}=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+n}dx=\dfrac{1}{m+n+1}\left[(x-\alpha)^{m+n+1}\right]_\alpha^\beta=\dfrac{1}{m+n+1}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$

だから，①に代入すると，

$$I_{m,\ n}=(-1)^n\frac{n}{m+1}\cdot\frac{(n-1)}{m+2}\cdot\frac{(n-2)}{m+3}\cdots\frac{1}{m+n}\cdot\frac{(\beta-\alpha)^{m+n+1}}{m+n+1}$$

$$=(-1)^n\frac{n}{m+n+1}\cdot\frac{(n-1)}{m+n}\cdot\frac{(n-2)}{m+(n-1)}\cdots\frac{1}{m+2}\cdot\frac{(\beta-\alpha)^{m+n+1}}{m+1}$$

よって，$\boxed{I_{m,\ n}=(-1)^n\dfrac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$

3 ［2012 立命館大］

n を正の整数，k は $0\leqq k\leqq n$ を満たす整数とする。実数 α，β $(\alpha<\beta)$ に対して，積分 $I_{n,\ k}$ を

$$I_{n,\ 0}=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^n dx,\quad I_{n,\ n}=\int_\alpha^\beta (x-\beta)^n dx,$$

$$I_{n,\ k}=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{n-k}(x-\beta)^k dx \quad (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

で定義する。$I_{n,\ 0}$ と $I_{n,\ n}$ を n，α，β を用いて表すと，$I_{n,\ 0}=$ ア $\boxed{}$，

$I_{n,\ n}=$ イ $\boxed{}$ となる。$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ のとき，$I_{n,\ k}$ と $I_{n,\ k-1}$ の関係を求めると，

$\boxed{a\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3}$ ： **《面積公式①》**

$I_{n,\ k}=$ ウ$\boxed{}$ $I_{n,\ k-1}$ を得る。したがって，$I_{n,\ k}=$ エ$\boxed{}$ $I_{n,\ 0}$ が成り立つ。

ここで，$H_{n,\ k}=\left|\frac{I_{n,\ k}}{I_{n,\ 0}}\right|$ とする。$H_{n,\ k}$ と $H_{n,\ k-1}$ の関係を求めると

$H_{n,\ k}=$ オ$\boxed{}$ $H_{n,\ k-1}$ を得る。

m を 0 以上の整数とする。整数 k が，$1\leqq k\leqq 2m+1$ を満たすとき，

$H_{2m+1,\ k-1}<H_{2m+1,\ k}$ となる m と k の条件は $k\geqq$ カ$\boxed{}$，$H_{2m+1,\ k-1}>H_{2m+1,\ k}$ となる場合の条件は $k\leqq$ キ$\boxed{}$ である。m を定数とみなして整数 l を $0\leqq l\leqq 2m+1$ の範囲で動かすとき，$H_{2m+1,\ l}$ は，$l=$ ク$\boxed{}$ または $l=$ ケ$\boxed{}$ で最小になる。また，

$H_{2m,\ l}$ は，整数 l を $0\leqq l\leqq 2m$ の範囲で動かすとき，$l=$ コ$\boxed{}$ で最小になる。

$$I_{n,0}=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^n dx=\left[\frac{1}{n+1}(x-\alpha)^{n+1}\right]_{\alpha}^{\beta}\overset{ア}{=}\frac{1}{n+1}(\beta-\alpha)^{n+1}$$

$$I_{n,n}=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\beta)^n dx=\left[\frac{1}{n+1}(x-\beta)^{n+1}\right]_{\alpha}^{\beta}\overset{イ}{=}-\frac{1}{n+1}(\alpha-\beta)^{n+1}$$

$k=1$，2，……，n のとき

$$\begin{aligned}I_{n,k}&=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{n-k}(x-\beta)^k dx\\&=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\frac{1}{n-k+1}(x-\alpha)^{n-k+1}\right\}'(x-\beta)^k dx\\&=\left[\frac{1}{n-k+1}(x-\alpha)^{n-k+1}(x-\beta)^k\right]_{\alpha}^{\beta}-\frac{k}{n-k+1}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{n-k+1}(x-\beta)^{k-1}dx\\&\overset{ウ}{=}-\frac{k}{n-k+1}I_{n,k-1}\end{aligned}$$

したがって
$$\begin{aligned}I_{n,k}&=-\frac{k}{n-k+1}I_{n,k-1}=(-1)^2\frac{k(k-1)}{(n-k+1)(n-k+2)}I_{n,k-2}\\&=\cdots\cdots\\&=(-1)^k\frac{k(k-1)\cdots\cdots 1}{(n-k+1)(n-k+2)\cdots\cdots(n-k+k)}I_{n,0}\\&\overset{エ}{=}(-1)^k\frac{k!(n-k)!}{n!}I_{n,0}\end{aligned}$$

また
$$\begin{aligned}H_{n,k}&=\left|\frac{I_{n,k}}{I_{n,0}}\right|=\left|-\frac{k}{n-k+1}\cdot\frac{I_{n,k-1}}{I_{n,0}}\right|\\&=\frac{k}{n-k+1}\left|\frac{I_{n,k-1}}{I_{n,0}}\right|\overset{オ}{=}\frac{k}{n-k+1}H_{n,k-1}\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

$\boxed{a\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3}$ ：**《面積公式①》**

$H_{2m+1,k-1}<H_{2m+1,k}$ とすると，① より　　$H_{2m+1,k-1}<\frac{k}{2m-k+2}H_{2m+1,k-1}$

$H_{2m+1,k-1}>0$ であるから　　$\frac{k}{2m-k+2}>1$

$k\leqq 2m+1$ より，$2m-k+2>0$ であるから

$k>2m-k+2$　　　すなわち　　$k>m+1$

m，k は整数であるから　　$k\geqq{}^{カ}m+2$

$H_{2m+1,k-1}>H_{2m+1,k}$ とすると，$\frac{k}{2m-k+2}<1$ から　　$k<m+1$

したがって　　$k\leqq{}^{キ}m$

$k\leqq m$ のとき，$H_{2m+1,k-1}>H_{2m+1,k}$ より

$H_{2m+1,0}>H_{2m+1,1}>H_{2m+1,2}>\cdots\cdots>H_{2m+1,m}$

$k\geqq m+2$ のとき，$H_{2m+1,k-1}<H_{2m+1,k}$ より

$H_{2m+1,m+1}<H_{2m+1,m+2}<\cdots\cdots<H_{2m+1,2m+1}$

ここで，$H_{2m+1,m+1}=\frac{m+1}{2m+1-(m+1)+1}H_{2m+1,m}=H_{2m+1,m}$　であるから

$H_{2m+1,0}>H_{2m+1,1}>\cdots\cdots>H_{2m+1,m}$

$=H_{2m+1,m+1}<H_{2m+1,m+2}<\cdots\cdots<H_{2m+1,2m+1}$

したがって，整数 l を $0\leqq l\leqq 2m+1$ の範囲で動かすとき，$H_{2m+1,l}$ は

$l={}^{ク,ケ}m$，$m+1$ で最小になる。

同様にして，$1\leqq k\leqq 2m$ である整数 k について，

$H_{2m,k-1}<H_{2m,k}$ とすると　　$k\geqq m+1$

$H_{2m,k-1}>H_{2m,k}$ とすると　　$k\leqq m$

したがって

$H_{2m,0}>H_{2m,1}>H_{2m,2}>\cdots\cdots>H_{2m,m}<H_{2m,m+1}<\cdots\cdots<H_{2m,2m}$

よって，$H_{2m,l}$ は $l={}^{コ}m$ で最小になる。