直線の問題

$\boxed{1}$ [青2例66] x，y の2次方程式が2直線の方程式を表す条件

$3x^2-2xy-y^2+ax+6y-8=0$ が 2 直線の方程式を表すように定数 a の値を定め，各直線の方程式を求めよ。

(解説)

$3x^2-2xy-y^2=(x-y)(3x+y)$

であるから，与えられた方程式が 2 直線を表すとすると，方程式の左辺は

$3x^2-2xy-y^2+ax+6y-8=(x-y+c)(3x+y+r)$ …… ①

と表される。

① の右辺を変形すると

$3x^2-2xy-y^2+(3c+r)x+(c-r)y+cr$

これと ① の左辺とで係数を比べて

$3c+r=a$ …… ②　$c-r=6$ …… ③　$cr=-8$ …… ④

これを解く。③，④ から r を消去して　$c(c-6)=-8$

$c^2-6c+8=0$　より　$c=2,\ 4$

③ から　$r=-4,\ -2$　② から　$a=2,\ 10$

よって，① から

$a=2,\ x-y+2=0,\ 3x+y-4=0$；または

$a=10,\ x-y+4=0,\ 3x+y-2=0$

[別解]

与えられた方程式が 2 直線を表すとすると，方程式の左辺は因数分解できる。

$3x^2-2xy-y^2+ax+6y-8=0$ を x についての2次方程式とみて整理して，

$3x^2+(a-2y)x-y^2+6y-8=0$ …… ① の判別式をD_1 とすると，

$D_1=(a-2y)^2-4\cdot3\cdot(-y^2+6y-8)=16y^2-4(a+18)y+a^2+96$ …… ②

②が完全平方式になればよい。②の判別式をD_2 とすると，

$D_2/4=4(a+18)^2-16(a^2+96)=-12a^2+144a-240$

$D_2=0$ となればよいから，$a^2-12a+20=0$

$(a-2)(a-10)=0$　よって，$a=2,\ 10$ [答]

$a=2$ のとき，$x-y+2=0,\ 3x+y-4=0$ [答]

$a=10$ のとき，$x-y+4=0,\ 3x+y-2=0$ [答]

直線の問題

$\boxed{2}$ ［青2問123］定点を通る直線と定線分が共有点をもつ条件

直線 $L:(k+2)x-y+2k-1=0$ が与えられている。

(1)　L は k の値に関係なく定点 ${}^{ア}\boxed{}$ を通る。

(2)　点 P$(-3,\ 0)$，Q$(5,\ 2)$ に対し，線分 PQ（両端を含む）と L が共有点をもつような k の値の範囲は ${}^{イ}\boxed{}$ である。また，どのように k を定めても L は線分 PQ 上の点 ${}^{ウ}\boxed{}$ を通らない。

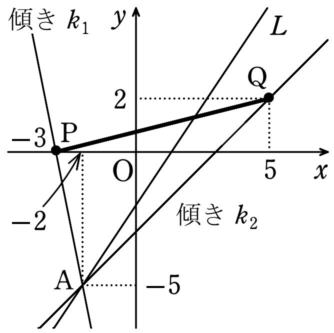
解説

(1)　L の方程式を k について整理して　$k(x+2)+2x-y-1=0$　…… ①

これが k についての恒等式である条件は　$x+2=0$，$2x-y-1=0$

これを解いて　$x=-2$，$y=-5$　ゆえに，L は定点 $(-2,\ -5)$ を通る。

(2)　① から，直線 L は定点 A$(-2,\ -5)$ を通る，直線 $x=-2$ 以外の直線を表す。



よって，L が線分 PQ と共有点をもつ条件は，

直線 AP の傾きを k_1，直線 AQ の傾きを k_2 とすると

　(L の傾き)$\leqq k_1$ または (L の傾き)$\geqq k_2$

である。ここで，L の傾きは $k+2$ で

$$k_1=\frac{-5-0}{-2-(-3)}=-5,\quad k_2=\frac{2-(-5)}{5-(-2)}=1$$

ゆえに　$k+2\leqq -5$ または $k+2\geqq 1$

したがって　$k\leqq -7$ または $k\geqq -1$

また，直線 PQ の方程式は $y=\dfrac{1}{4}(x+3)$ であり，点 $\left(-2,\ \dfrac{1}{4}\right)$ は線分 PQ 上の点である。よって，どのように k を定めても，L は直線 $x=-2$ を表すことはできないから，L は線分 PQ 上の点 $\left(-2,\ \dfrac{1}{4}\right)$ を通ることはない。