順列($_nP_r$)と組合せ($_nC_r$)

1 ●順列　：一列に並べる　<順番を問題にする>

↓　アプローチ①

同じものを含む順列

↑　アプローチ②

●組合せ：選ぶ？　<順番を問題にしない：順番を考えない！>

→　以下の例１と例２：同じ「選ぶ」

例１：10 人の委員の中から委員長，副委員長，書記を 1 人ずつ選ぶ方法は，何通りあるか。ただし，兼任は認めないものとする。

例２：30 人の生徒から 3 人の委員を選ぶ方法は何通りあるか。

2 ◎　$_nP_r$　と　$_nC_r$　の違い

$$_nP_r=\frac{n!}{(n-r)!}$$ …①：順番を問題にする。

$$_nC_r=\frac{_nP_r}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$ …②：順番は問題にしない。

3　n 個から r 個取る組合せの総数 $_nC_r$ についても，前ページと同様に考えて，$_nC_r\times r!={}_nP_r$ から，次の 1 が導かれる。

また，18 ページの等式 ① から，$_nC_r$ は次の 2 の式で表すこともできる。

組合せの総数 $_nC_r$

1　$_nC_r=\dfrac{_nP_r}{r!}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots\cdots\cdot3\cdot2\cdot1}$　　特に　$_nC_n=1$

2　$_nC_r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

上の公式が $r=0$ のときにも成り立つように，$_nC_0=1$　と定める。

例 7　(1)　$_9C_3=\dfrac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84$　　(2)　$_7C_4=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=35$

(3)　$_5C_1=5$　　(4)　$_5C_5=1$　　終

練習 24　次の値を求めよ。

(1)　${}_7C_3$　　(2)　${}_6C_4$　　(3)　${}_4C_1$　　(4)　${}_6C_6$

${}_nC_r$ には，次の性質がある。

${}_nC_r$ の性質

3　${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$　　　ただし　$0 \leqq r \leqq n$

4　${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$　　　ただし　$1 \leqq r \leqq n-1$，$n \geqq 2$

異なる n 個のものの中から異なる r 個を取り出すとき，取り出す r 個を選ぶことは，後に残す $(n-r)$ 個を選ぶことでもあるから，${}_nC_r$ と ${}_nC_{n-r}$ は等しい。すなわち，3 が成り立つ。

問 5　4 が成り立つことを，次の考え方を用いて説明せよ。
異なる n 個のものの中から異なる r 個を取り出すとき，取り出した r 個の中に，特定の 1 個を含む場合と，含まない場合がある。

＜4 の証明＞

$$\text{右辺} = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = \frac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!} + \frac{(n-1)!}{r!\{(n-1)-r\}!}$$

$$= \frac{r(n-1)!}{r(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!(n-r)}{r!(n-r-1)!(n-r)}$$

$$= \frac{r(n-1)! + n! - r(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = {}_nC_r = \text{左辺}$$

$\boxed{4}$ 10 人の委員の中から委員長，副委員長，書記を 1 人ずつ選ぶ方法は，何通りあるか。ただし，兼任は認めないものとする。

解答　720 通り

$\boxed{5}$ 30 人の生徒から 3 人の委員を選ぶ方法は何通りあるか。

解答　4060 通り