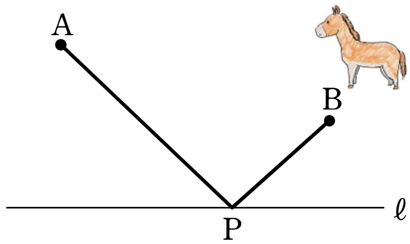
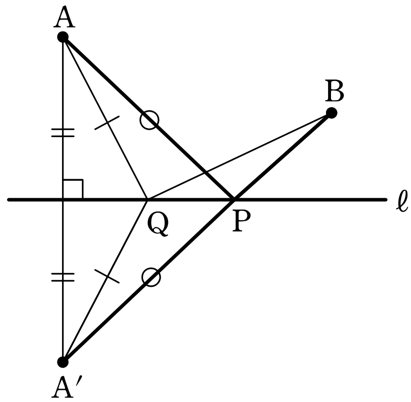
ロバの定理

1 2 点 A，B は直線 ℓ に関して同じ側にある。
ℓ 上に点 P をとり，A，B からの距離の和
AP＋BP が最小になるようにしたい。
点 P の位置をどこにとればよいか。



解答 ℓ に関して A と対称な点を A$'$ とする。A$'$ と B を結ぶ線分と ℓ との交点を P とすると，P が求める位置である。



証明 ℓ 上に P と異なる任意の点 Q をとると，ℓ は線分 AA$'$ の垂直二等分線であるから

$$\mathrm{AP}=\mathrm{A'P},\ \mathrm{AQ}=\mathrm{A'Q}$$

よって　$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}=\mathrm{A'P}+\mathrm{BP}$

$\qquad\qquad=\mathrm{A'B}$ ……①

また　$\mathrm{AQ}+\mathrm{BQ}=\mathrm{A'Q}+\mathrm{BQ}$ ……②

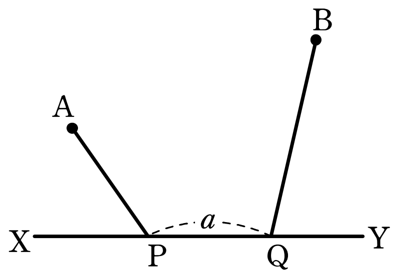
$\triangle\mathrm{A'QB}$ において　$\mathrm{A'Q}+\mathrm{QB}>\mathrm{A'B}$

であるから，①，②により

$$\mathrm{AQ}+\mathrm{QB}>\mathrm{AP}+\mathrm{PB}$$

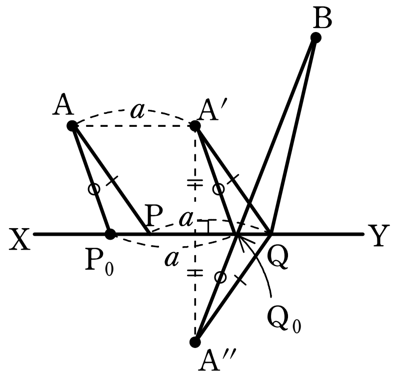
ゆえに，求める点の位置は P である。

2 定直線 XY上と，その上にない 2 定点 A，B が図のように直線 XY に関して同じ側にあるように与えられている。直線 XY 上に 2 点 P，Q を図のように，PQ＝a（一定）となるようにとり，AP＋PQ＋QB を最小にするには，P，Q をそれぞれどのような位置にとればよいか。



解答 点 A を Y の方向に 直線 XY に平行に a の長さだけ移動した点を A$'$ とし，点 A$'$ の直線 XY に関する対称点を A$''$とする。A$''$B とXY の交点を Q_0 とし，XY 上に点 P_0 を X の方向に $\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_0=a$ となるようにとる。この P_0，Q_0 をそれぞれ P，Q としてとればよい。

点 A を Y の方向に 直線 XY に平行に a の長さだけ移動した点を A′ とし，点 A′ の直線 XY に関する対称点を A″ とする。A″B とXY の交点を Q_0 とし，XY 上に点 P_0 を X の方向に $P_0Q_0=a$ となるようにとる。……㊟



このとき　$AP=A'Q=A''Q$ となるから

$$
\begin{aligned}
AP+PQ+QB&=A''Q+QB+a\\
&\geqq A''B+a\\
&=A''Q_0+Q_0B+a\\
&=AP_0+P_0Q_0+Q_0B
\end{aligned}
$$

すなわち　$AP+PQ+QB\geqq AP_0+P_0Q_0+Q_0B$

等号は，P と P_0，Q と Q_0 が一致するとき成り立ち，このとき $AP+PQ+QB$ は最小になる。

よって，上の ㊟の P_0，Q_0 をそれぞれ P，Q としてとればよい。

$\boxed{3}$ 定点 A (0，0，2)，B (1，2，1) と xy 平面上に動点 P がある。このとき，$AP+PB$ の最小値を求めよ。

解答　$\sqrt{14}$

xy 平面に関して，点 B と対称な点を C とすると

C (1，2，−1)

P は xy 平面上にあるから　　$PB=PC$

ゆえに　　　$AP+PB=AP+PC$

$AP+PC$ が最小となるのは，3 点 A，P，C が一直線上にあるときである。

よって，求める最小値は線分 AC の長さに等しく

$$AC=\sqrt{(1-0)^2+(2-0)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{14}$$