《三角関数の公式集》

＜基本３公式＞

① $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　　② $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

①の両辺を$\cos^2\theta$で割って，②を用いると，

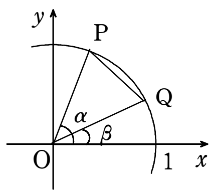
③ $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

＜加法定理＞

半径１の単位円上の点P，Qの座標は，それぞれ
P$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，Q$(\cos\beta,\ \sin\beta)$とおけるから，

$\mathrm{PQ}^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$
$=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$ … i)

一方，△OPQに余弦定理を用いると，
$\mathrm{PQ}^2=1^2+1^2-2\cos(\alpha-\beta)$ … ii)



i)＝ ii)より，$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ …iii)
が成り立つ．

iii)において，$\beta\longrightarrow-\beta$ で置き換えると，
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ …iv)
となる．

また，iii)において，$\alpha\longrightarrow\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ で置き換えると，

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$

よって，$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ … v)となる．
また，v)において，$\beta\longrightarrow-\beta$ で置き換えると，
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ …vi)となる．

ゆえに，
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ …④
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ …⑤

$\tan(\alpha+\beta)$の加法定理は②から，

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$ より，分母，分子を $\cos\alpha\cos\beta$ で割ると，

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ …⑥

＜２倍角の公式＞

④，⑤，⑥において，$\beta=\alpha$ とおくと，それぞれ，
$\sin2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
よって，$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ …⑦

また，$\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

＜半角の公式＞

⑦(余弦の２倍角の公式)より，$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos2\theta}{2}$，$\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos2\theta}{2}$

$\theta=\dfrac{\alpha}{2}$ を代入すると，

$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$，$\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$　となる．

また，$\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

＜積→和，和→積の変換公式＞

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ …④
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ …④′ の２式を足し引きして，

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$

$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$

よって，
$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$
$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

また，
$\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$　($\alpha+\beta=A$，$\alpha-\beta=B$ とおく)
$\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

同様にして，
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ …⑤
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ …⑤′ の２式を足し引きして，

$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$

$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$

よって，
$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$
$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

また，
$\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$
$\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

＜三角関数の合成＞

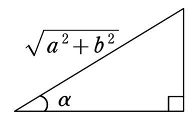
加法定理　$\sin(\theta+\alpha)=\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha$ …④″ より，

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\theta\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos\theta\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ と変形して，

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

ただし，$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

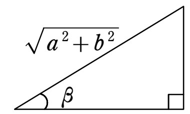
右図のような図を書けばよい．



b：$\cos\theta$ の係数
a：$\sin\theta$ の係数

例　$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\cos(\theta-\beta)=\cos\theta\cos\beta+\sin\theta\sin\beta$ …⑤″ を用いて，
$\cos(\theta-\beta)$に合成する公式を導いてみよう！



a：$\sin\theta$ の係数
b：$\cos\theta$ の係数

$b\cos\theta+a\sin\theta=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\beta)$　※符号，係数に注意のこと！

例　$\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$