三角比の公式

① **基本公式**

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\quad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

※余角の公式

$$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta\qquad \cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta\qquad \tan(90^\circ-\theta)=\frac{1}{\tan\theta}$$

※補角の公式

$$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta\qquad \cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta\qquad \tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta$$

② **正弦定理**：$\dfrac{a}{\sin\mathrm{A}}=\dfrac{b}{\sin\mathrm{B}}=\dfrac{c}{\sin\mathrm{C}}=2R$　(R は外接円の半径)：**一辺と両端の角**

③ **余弦定理**：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\mathrm{A}$ ：**二辺とその間の角**

$\Rightarrow$　$\cos\mathrm{A}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ ：**三辺**

④ 三角形の面積：$S=\dfrac{1}{2}bc\sin\mathrm{A}$

$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ：**ヘロンの公式** $\left(s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\right)$

証明　$\sin^2\mathrm{A}=1-\cos^2\mathrm{A}=(1+\cos\mathrm{A})(1-\cos\mathrm{A})$

$$=\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\times\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\times\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}$$

ここで，$s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$ とおくと，$a+b+c=2s$ などを使って変形して，

$$\sin^2\mathrm{A}=\frac{2s\cdot2(s-a)\cdot2(s-c)\cdot2(s-b)}{4b^2c^2}=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2c^2}$$　よって，

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\mathrm{A}=\frac{bc}{2}\cdot\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

参考　**円に内接する**四角形の各辺をそれぞれ a，b，c，d $\left(s=\dfrac{1}{2}(a+b+c+d)\right)$ とすると，その四角形の面積：$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ ：**ブラマグプタの公式**

⑤ 球の体積 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$　(r は半径)　　　球の表面積 $S=4\pi r^2$　(r は半径)

相似な図形(相似比 $m:n$)の面積比は，$m^2:n^2$

相似な図形(相似比 $m:n$)の体積比は，$m^3:n^3$

三角比の公式

① **基本公式**：$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\Rightarrow\quad 1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

※余角の公式

$\sin(90°-\theta)=\cos\theta \qquad \cos(90°-\theta)=\sin\theta \qquad \tan(90°-\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}$

※補角の公式

$\sin(180°-\theta)=\sin\theta \qquad \cos(180°-\theta)=-\cos\theta \qquad \tan(180°-\theta)=-\tan\theta$

② **正弦定理**：$\dfrac{a}{\sin \mathrm{A}}=\dfrac{b}{\sin \mathrm{B}}=\dfrac{c}{\sin \mathrm{C}}=2R$　(R は外接円の半径)

$\Rightarrow\quad \sin \mathrm{A}=\dfrac{a}{2R}$，$a=2R\sin \mathrm{A}$

③ **余弦定理**：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos \mathrm{A}$

$\Rightarrow\quad \cos \mathrm{A}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$　　参考　$a=b\cos \mathrm{C}+c\cos \mathrm{B}$

④ 三角形の面積：$S=\dfrac{1}{2}bc\sin \mathrm{A}=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$　(r は内接円の半径)

$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$：**ヘロンの公式** $\left(s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\right)$

証明　$\sin^2 \mathrm{A}=1-\cos^2 \mathrm{A}=(1+\cos \mathrm{A})(1-\cos \mathrm{A})$

$=\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=\dfrac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\times\dfrac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$

$=\dfrac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\times\dfrac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=\dfrac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}$

ここで，$s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$ とおくと，$a+b+c=2s$ などを使って変形して，

$\sin^2 \mathrm{A}=\dfrac{2s\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-c)\cdot 2(s-b)}{4b^2c^2}=\dfrac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2c^2}$　よって，

$S=\dfrac{1}{2}bc\sin \mathrm{A}=\dfrac{bc}{2}\cdot\dfrac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

⑤ 球の体積 V，表面積 S：$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$，$S=4\pi r^2$　(r は半径)

相似な図形(相似比 $m:n$)の面積比は，$m^2:n^2$，

相似な図形(相似比 $m:n$)の体積比は，$m^3:n^3$

三角比の公式

三角形の面積：$S=\dfrac{1}{2}bc\sin\mathrm{A}=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$　(r は内接円の半径)

$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ：**ヘロンの公式** $\left(s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\right)$

$\boxed{\text{証明}}$　$\sin^2\mathrm{A}=1-\cos^2\mathrm{A}=(1+\cos\mathrm{A})(1-\cos\mathrm{A})$

$$=\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\times\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\times\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}$$

ここで，$s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$ とおくと，$a+b+c=2s$ などを使って変形して，

$$\sin^2\mathrm{A}=\frac{2s\cdot2(s-a)\cdot2(s-c)\cdot2(s-b)}{4b^2c^2}=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2c^2}$$　よって，

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\mathrm{A}=\frac{bc}{2}\cdot\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$\boxed{\text{参考}}$　**円に内接する**四角形の各辺をそれぞれ a，b，c，d $\left(s=\dfrac{1}{2}(a+b+c+d)\right)$ とすると，その四角形の面積：$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ ：**ブラマグプタの公式**