

- 1 $\log_{10}2 = 0.3010$ とする. 2^{30} は何桁の整数か.

解答 $\log_{10}2^{30} = 30\log_{10}2 = 30 \times 0.3010 = 9.03$

ゆえに $9 \leq \log_{10}2^{30} < 10$ よって $10^9 \leq 2^{30} < 10^{10}$

したがって, 2^{30} は 10 桁の整数である.

ヒント N が n 桁の整数である $\Leftrightarrow 10^{n-1} \leq N < 10^n$

- 2 $\log_{10}2 = 0.3010$ として, $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ は, 小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるかを調べよ.

解答 $\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 10\log_{10}\frac{1}{2} = 10\log_{10}2^{-1} = -10\log_{10}2$
 $= -10 \times 0.3010 = -3.01$

ゆえに $-4 \leq \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} < -3$ よって $10^{-4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{10} < 10^{-3}$

したがって, $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ は小数第 4 位に初めて 0 でない数字が現れる.

ヒント N が小数第 n 位に初めて 0 でない数字が現れる
 $\Leftrightarrow 10^{-n} \leq N < 10^{-n+1}$

- 3 $\log_{10}2 = 0.3010$ とする. 不等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0.001$ を満たす整数 n の最小値を求めよ.

解答 $\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0.001$ において,

両辺の常用対数をとると $\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^n < \log_{10}0.001$

$$n\log_{10}\frac{1}{2} < \log_{10}10^{-3}$$

$$-n\log_{10}2 < -3$$

よって $n > \frac{3}{\log_{10}2} = \frac{3}{0.3010} = 9.96\dots\dots$

ゆえに, 求める整数 n の最小値は 10