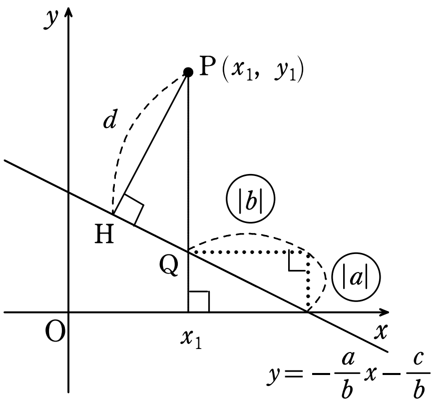
《点と直線の距離の公式》



証明　点 P $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ との距離 d を求める．$b\neq 0$ として，

$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$ より，点Qの座標は，

$\left(x_1,\ -\dfrac{a}{b}x_1-\dfrac{c}{b}\right)$ となる．

右図より，△PQHと相似な三角形との辺の比を考えることにより，

$$d:|b|=\left|y_1-\left(-\frac{a}{b}x_1-\frac{c}{b}\right)\right|:\sqrt{a^2+b^2}$$

が成り立つ．よって，$d=\dfrac{|b|\left|y_1+\dfrac{a}{b}x_1+\dfrac{c}{b}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\boxed{\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

また，$b=0$ のときも，$d=\left|x_1-\left(-\dfrac{c}{a}\right)\right|=\left|\dfrac{ax_1+c}{a}\right|=\dfrac{|ax_1+c|}{|a|}$ となり適する．終

＜例題＞　点 $(2,\ -2)$ と次の直線の距離を求めよ．

(1)　$2x+4y-7=0$

(2)　$y=\dfrac{1}{3}x+2$

＜例題＞(1)　k を定数とする．直線 $(3x-y-4)+k(x+2y+1)=0$ は k の値に関係なく，定点を通ることを示し，その定点の座標を求めよ．

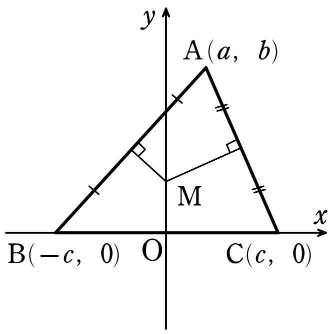
(2)　(1) の定点と，点 $(2,\ 0)$ を通る直線の方程式を求めよ．

練習１８　解答例

三角形の 3 辺の垂直二等分線は，1 点で交わることを証明せよ。

直線 BC を x 軸に，辺 BC の垂直二等分線を y 軸にとり，△ABC の各頂点の座標を，それぞれ次のようにおく。

A $(a,\ b)$，B $(-c,\ 0)$，C $(c,\ 0)$



↑自分で座標軸を設定する

このとき，$b \fallingdotseq 0$，$c \fallingdotseq 0$ である。

→$b=0$ または $c=0$ のときは，三角形ができないため

$a=c$ または $a=-c$ のとき，△ABC は直角三角形となり，3 辺の垂直二等分線は斜辺の中点で交わる。

→$a=c$ または $a=-c$ のときは，傾きが存在しないため，あらかじめコメントしておく

$a \fallingdotseq c$ かつ $a \fallingdotseq -c$ のとき，辺 AB，AC の傾きは，それぞれ $\dfrac{b}{a+c}$，$\dfrac{b}{a-c}$ であるから，

辺 AB の垂直二等分線は，点 $\left(\dfrac{a-c}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$ を通り，傾きが $-\dfrac{a+c}{b}$ の直線で，

その方程式は　$y-\dfrac{b}{2}=-\dfrac{a+c}{b}\left(x-\dfrac{a-c}{2}\right)$　…… ①

辺 AC の垂直二等分線は，点 $\left(\dfrac{a+c}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$ を通り，傾きが $-\dfrac{a-c}{b}$ の直線で，

その方程式は，$y-\dfrac{b}{2}=-\dfrac{a-c}{b}\left(x-\dfrac{a+c}{2}\right)$　…… ②

①，② の y 切片は，ともに $\dfrac{b}{2}+\dfrac{(a+c)(a-c)}{2b}$ となり一致する。

①，② の交点は，$\left(0,\ \dfrac{b}{2}+\dfrac{(a+c)(a-c)}{2b}\right)$ となり，この点は

辺 BC の垂直二等分線 (y 軸) 上にあるから，

3 つの垂直二等分線は 1 点で交わる。