＜漸化式の解法＞

問　$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

①＜類推して求める＞　$\{a_n\}$：1，3，7，15，31，…

階差数列 $\{b_n\}$：　2，4，8，16，…

階差数列 $\{b_n\}$ は，初項 2，公比 2 の等比数列となるから，$b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

よって，$n\geqq 2$ のとき，$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k=\boxed{}$

これは，$n=1$ のときも成り立つ．よって，$a_n=\boxed{}$ 答

※　この解法では，類推にすぎないので減点されてもしかたがない！

②＜階差数列 $\{b_n\}$ を一般的に求める＞

与えられた漸化式において，$n\to n+1$ とおくと，

$a_{n+2}=2a_{n+1}+1$，

$a_{n+1}=2a_n\quad+1$，辺々引くと，$\boxed{}$ …（ｉ）

階差数列の定義である $b_n=a_{n+1}-a_n$ より，$a_{n+2}-a_{n+1}=b_{n+1}$ だから，

（ｉ）より，$b_{n+1}=2b_n$ となり，数列 $\{b_n\}$ は，公比が 2 の等比数列であることがわかる．

初項は，$b_1=a_2-a_1=2$ より，$b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$　(このあと，①と同様に解けるが…)

$b_n=a_{n+1}-a_n=(2a_n+1)-a_n=a_n+1$，$b_n=2^n$ より，$a_n=\boxed{}$ 答

問題に与えられた漸化式より

※　もっと，簡単に解くのが次の解法である．

③＜$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ の形に変形する＞

与えられた漸化式を変形すると，

$\boxed{}$：$a_n+1=c_n$ とおくと，$a_{n+1}+1=c_{n+1}$

となるから，数列 $\{a_n+1\}$ は，初項　$a_1+1=2$，公比 2 の等比数列である．

よって，$a_n+1=2\cdot 2^{n-1}$　ゆえに，$a_n=\boxed{}$ 答

つまり，$\{a_n\}$：1，3，7，15，31，…に 1 ずつたした数列を考えると，

$\{a_n+1\}$：2，4，8，16，32，… となり，等比数列になる．

したがって，$a_{n+1}=pa_n+q$（p，q は定数，$p\neq 1$）の形の数列は，定数を足し引きして，少しずらすことにより，必ず公比が p の等比数列にできる．

$a_{n+1}=4a_n+2^{n+1}$ や $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n}{2+a_n}$ の形の少し複雑な漸化式も，工夫することにより，$a_{n+1}=pa_n+q$（p，q は定数，$p\neq 1$）の形に帰着できるのである．

この形に帰着できない漸化式のときは，①のように，類推によって，一般項を求めた後，**数学的帰納法**で証明すれば減点されることはない．

＜漸化式の解法＞

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n-2$　　　　(2)　$a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3}+2$

解説

(1)　漸化式を変形すると　　$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$　　$\Leftarrow$　　$c=3c-2$ を満たす $c=1$

↑これは答案に書かない！

$a_n-1=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列で，初項は　$b_1=a_1-1=2-1=1$

ゆえに，数列 $\{b_n\}$ の一般項は　　$b_n=1\cdot 3^{n-1}=3^{n-1}$

したがって　　$a_n=b_n+1=3^{n-1}+1$

(2)　漸化式を変形すると　　$a_{n+1}-3=\dfrac{1}{3}(a_n-3)$　　$\Leftarrow$　　$c=\dfrac{c}{3}+2$ を満たす $c=3$

↑これは答案に書かない！

$a_n-3=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列で，初項は　$b_1=a_1-3=1-3=-2$

ゆえに，数列 $\{b_n\}$ の一般項は　　$b_n=-2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=-\dfrac{2}{3^{n-1}}$

したがって　　$a_n=3+b_n=3-\dfrac{2}{3^{n-1}}$

問　$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+1$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

③＜$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ の形に変形する＞

与えられた漸化式を変形すると，

$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$　:　$a_n+1=c_n$ とおくと，$a_{n+1}+1=c_{n+1}$

となるから，数列 $\{a_n+1\}$ は，初項　$a_1+1=2$，公比 2 の等比数列である.

よって，$a_n+1=2\cdot 2^{n-1}$　ゆえに，$a_n=2^n-1$　　答

つまり，$\{a_n\}:1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ \cdots$ に 1 ずつたした数列を考えると，

$\{a_n+1\}:2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \cdots$ となり，等比数列になる.

したがって，$a_{n+1}=pa_n+q$ (p，q は定数，$p\neq 1$) の形の数列は，定数を足し引きして，少しずらすことにより，必ず公比が p の等比数列にできる.

＜漸化式の解法＞

※漸化式の解法パターン編

$\boxed{① \quad a_{n+1}=a_n+f(n)}$

数列$\{a_n\}$の階差数列が$a_{n+1}-a_n=f(n)$ → 公式 $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} f(k)\ (n\geqq 2)$ を利用する．

例 1：$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2^n$　　例 2：$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+n^2$

$\boxed{② \quad a_{n+1}=p\,a_n+q\ (p\fallingdotseq 1)}$ ：$p=1$ の場合は①

特性方程式 $\alpha=p\,\alpha+q$ を満たす α を用いて，$a_{n+1}-\alpha=p\,(a_n-\alpha)$ の形に変形する．

例：$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$

$\boxed{③ \quad a_{n+2}=p\,a_{n+1}+q\,a_n}$

2 次方程式 $x^2=p\,x+q$ の解 α，β を用いて，2 つの形に変形する．

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta\,(a_{n+1}-\alpha a_n)$，$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha\,(a_{n+1}-\beta a_n)$

例：$a_1=1$，$a_2=4$，$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$

$\boxed{④ \quad a_{n+1}=p\,a_n+f(n)\ (p\fallingdotseq 1)}$

漸化式に $n\to n+1$ を代入して，階差数列 $\{b_n\}$ の漸化式をつくると，

②の形に帰着できる．

例：$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+n$

$\boxed{⑤ \quad a_{n+1}=p\,a_n+q^{n+1}\ (p\fallingdotseq 1)}$

両辺をq^{n+1}で割り，$\dfrac{a_n}{q^n}=b_n$ とおいた数列 $\{b_n\}$ の漸化式が②の形に帰着できる．

例：$a_1=2$，$a_{n+1}=6a_n+2^{n+1}$

$\boxed{⑥ \quad na_{n+1}=p\,(n+1)a_n+q\,n(n+1)}$

両辺を $n(n+1)$ で割り，$\dfrac{a_n}{n}=b_n$ とおいた数列 $\{b_n\}$ の漸化式が②の形に帰着できる．

例 1：$a_1=1$，$na_{n+1}=2(n+1)a_n+n(n+1)$

例 2：$a_1=1$，$na_{n+1}=(n+1)a_n+2$

$\boxed{⑦ \quad a_{n+1}=\dfrac{a_n}{p\,a_n+q}}$

両辺の逆数をとり，$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおいた数列 $\{b_n\}$ の漸化式が②の形に帰着できる．

例：$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+2}$

$\boxed{⑧ \quad a_{n+1}=\dfrac{r\,a_n+s}{p\,a_n+q}}$

$a_n-\alpha=b_n$ とおいて⑦の形に帰着できるよう，分子を b_n の定数倍だけにする．

例：$a_1=4$，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}$