数Ⅰ　最大・最小　補充プリント

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　　　　　　　)

1 関数 $y=x^2-2ax+1$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を次の各場合について求めよ．

(1) $a\leqq 0$　(2) $0<a<1$　(3) $a=1$　(4) $1<a<2$　(5) $2\leqq a$

解説

$y=x^2-2ax+1=(x-a)^2-a^2+1$

(1) $a\leqq 0$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる．

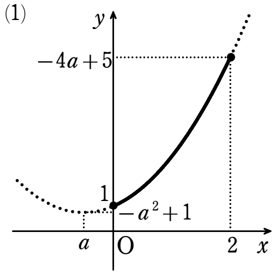
よって　$x=2$ のとき最大値 $-4a+5$，$x=0$ のとき最小値 1

(2) $0<a<1$ のとき

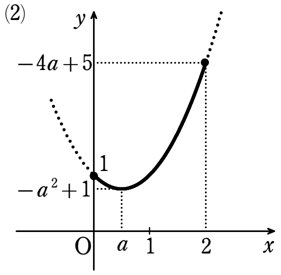
グラフは [図] の実線部分のようになる．

よって　$x=2$ のとき最大値 $-4a+5$，$x=a$ のとき最小値 $-a^2+1$

(1)



(2)



(3) $a=1$ のとき　$y=(x-1)^2$

よって　$x=0$，2 のとき最大値 1，$x=1$ のとき最小値 0 ← $-a^2+1$ に $a=1$ を代入したもの

(4) $1<a<2$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる．

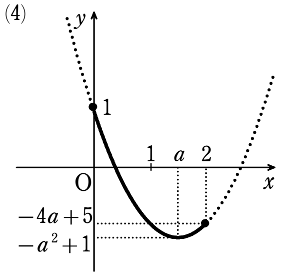
よって　$x=0$ のとき最大値 1，$x=a$ のとき最小値 $-a^2+1$

(5) $2\leqq a$ のとき

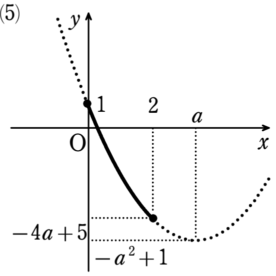
グラフは [図] の実線部分のようになる．

よって　$x=0$ のとき最大値 1，$x=2$ のとき最小値 $-4a+5$

(4)



(5)



2 a を定数とするとき，2 次関数 $y=x^2-2ax+2a^2$ について

(1) 区間 $0\leqq x\leqq 2$ におけるこの関数の最大値と最小値を求めよ．

(2) 区間 $0\leqq x\leqq 2$ におけるこの関数の最小値が 20 であるとき，a の値を求めよ．

解説

(1) $y=x^2-2ax+2a^2=(x-a)^2+a^2$

全区間では $x=a$ のとき最小値 a^2 をとるから，$x=a$ の区間 $0\leqq x\leqq 2$ に対する位置によって場合を分ける．

まず，最大値について，

[1] $a<1$ のとき　$x=2$ で　最大値 $2a^2-4a+4$

[2] $a=1$ のとき　$x=0, 2$ で　最大値 2

[3] $1<a$ のとき　$x=0$ で　最大値 $2a^2$

次に，最小値について

[1] $a<0$ のとき　$x=0$ で　最小値 $2a^2$

[2] $0\leqq a<2$ のとき　$x=a$ で　最小値 a^2

[3] $2\leqq a$ のとき　$x=2$ で　最小値 $2a^2-4a+4$

(2) (1) から　[1] $a<0$ のとき　$2a^2=20$　$a<0$ から　$a=-\sqrt{10}$

[2] $0\leqq a<2$ のとき　$0\leqq a^2<4$ から，$a^2=20$ を満たす実数 a は存在しない．

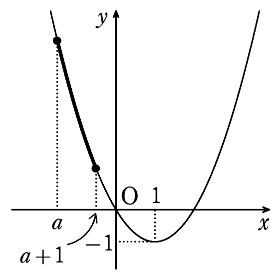
[3] $2\leqq a$ のとき　$2a^2-4a+4=20$ から　$a^2-2a-8=0$

よって　$(a+2)(a-4)=0$　$a\geqq 2$ から　$a=4$

[1]〜[3] から　$a=-\sqrt{10}, 4$

3 関数 $y=x^2-2x$ $(a\leqq x\leqq a+1)$ の最小値を b とすれば，b は a の関数となる．この関数を求め，そのグラフをかけ．

解説



$y=x^2-2x=(x-1)^2-1$　$(a\leqq x\leqq a+1)$

この関数のグラフは，点 $(1, -1)$ を頂点とする下に凸な放物線の一部で，右の図のようになる．

[1] $a+1\leqq 1$ すなわち $a\leqq 0$ のとき

y は $x=a+1$ で最小となるから

$b=(a+1)^2-2(a+1)=a^2-1$

[2] $a<1<a+1$ すなわち $0<a<1$ のとき

y は $x=1$ で最小となるから　$b=-1$

[3] $1\leqq a$ のとき

y は $x=a$ で最小となるから　$b=a^2-2a$

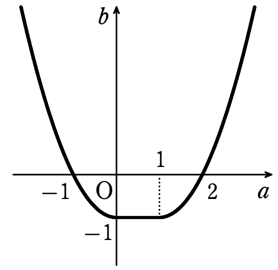
以上をまとめると

$a\leqq 0$ のとき　$b=a^2-1$

$0<a<1$ のとき　$b=-1$

$1\leqq a$ のとき　$b=a^2-2a$

グラフは図のようになる．



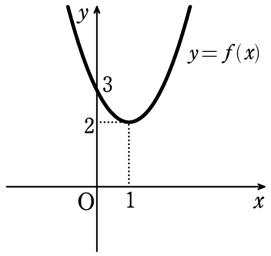
数Ⅰ　最大・最小　補充プリント　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　　　　　　)

4　a を実数として，$a \leqq x \leqq a+2$ で定義される関数 $f(x)=x^2-2x+3$ がある．この関数の最大値，最小値をそれぞれ $M(a)$, $m(a)$ とするとき，関数 $M(a)$, $m(a)$ のグラフを(別々に)かけ．

(解説)

$f(x)=(x-1)^2+2$

よって，$y=f(x)$ のグラフは，右図のようになる．



最大値について

[1]　$a+1 \leqq 1$ すなわち $a \leqq 0$ のとき

$M(a)=f(a)=(a-1)^2+2$

[2]　$a+1 \geqq 1$ すなわち $a \geqq 0$ のとき

$M(a)=f(a+2)=(a+1)^2+2$

よって，$b=M(a)$ のグラフは，下の左図．

最小値について

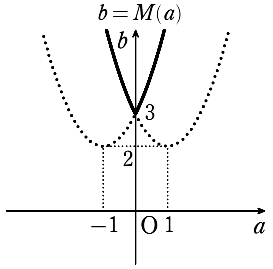
[1]　$a+2 \leqq 1$ すなわち $a \leqq -1$ のとき　　$m(a)=f(a+2)=(a+1)^2+2$

[2]　$a \leqq 1 \leqq a+2$ すなわち $-1 \leqq a \leqq 1$ のとき　　$m(a)=f(1)=2$

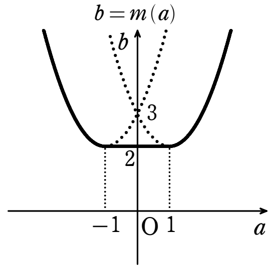
[3]　$a \geqq 1$ のとき　$m(a)=f(a)=(a-1)^2+2$

よって，$b=m(a)$ のグラフは，下の右図．

$b=M(a)$



$b=m(a)$



5　関数 $f(x)=x^2-4x+3$ $(a \leqq x \leqq a+2)$ の最大値を $M(a)$，最小値を $m(a)$ とするとき，$M(a)$，$m(a)$ を a を用いて表せ．

(解説)

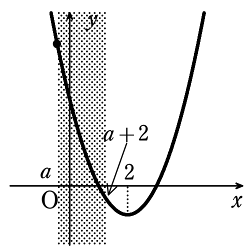
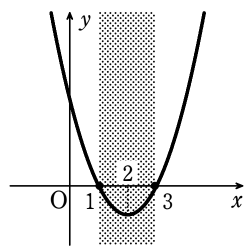
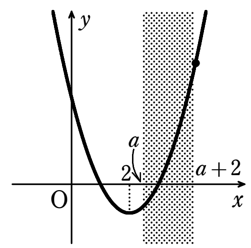
$f(x)=x^2-4x+3$ を変形すると　　$f(x)=(x-2)^2-1$

関数 $y=f(x)$ のグラフの軸 $x=2$ と定義域 $a \leqq x \leqq a+2$ との関係で場合を分ける．

まず，最大値について，

定義域の中央の値 $a+1$ と 軸 $x=2$ との関係から，

[1]　$a+1<2$　　　　[2]　$a+1=2$　　　　[3]　$2<a+1$

[1]　$a<1$ のとき　　$M(a)=f(a)=a^2-4a+3$

[2]　$a=1$ のとき　$M(a)=f(1)=f(3)=0$

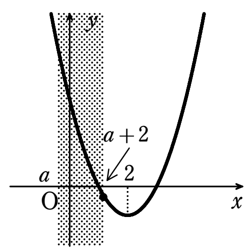
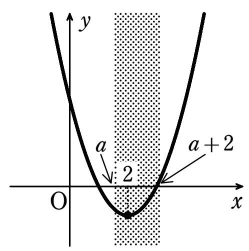
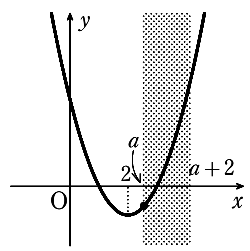
[3]　$1<a$ のとき　　$M(a)=f(a+2)=(a+2)^2-4(a+2)+3=a^2-1$

以上から　$a<1$ のとき　$M(a)=a^2-4a+3$,　　$a=1$ のとき　$M(a)=0$,

$1<a$ のとき　$M(a)=a^2-1$

次に，最小値について，

[1]　$a+2 \leqq 2$　　　　[2]　$a<2<a+2$　　　　[3]　$2 \leqq a$

[1]　$a \leqq 0$ のとき　　$m(a)=f(a+2)=(a+2)^2-4(a+2)+3=a^2-1$

[2]　$0<a<2$ のとき　$m(a)=f(2)=-1$

[3]　$2 \leqq a$ のとき　　$m(a)=f(a)=a^2-4a+3$

以上から　$a \leqq 0$ のとき　$m(a)=a^2-1$,　　$1<a<2$ のとき　$m(a)=-1$,

$2 \leqq a$ のとき　$m(a)=a^2-4a+3$

6　関数 $y=-x^2+6ax-a$ $(0 \leqq x \leqq 3)$ の最大値と最小値を求めよ．

(解説)

$y=-x^2+6ax-a$

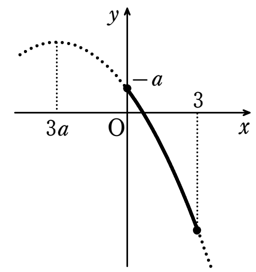
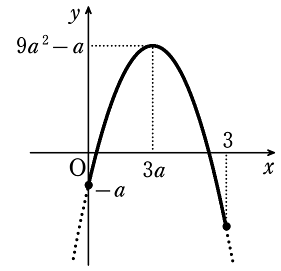
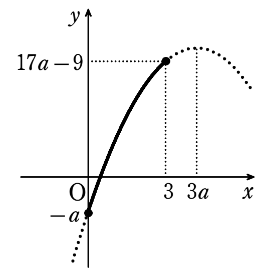
$=-\{x^2-2\cdot 3ax+(3a)^2\}+(3a)^2-a$

$=-(x-3a)^2+9a^2-a$

軸の方程式 $x=3a$ によって場合を分ける．

まず，最大値については，

[1]　$3a \leqq 0$　　　　[2]　$0<3a<3$　　　　[3]　$3 \leqq 3a$

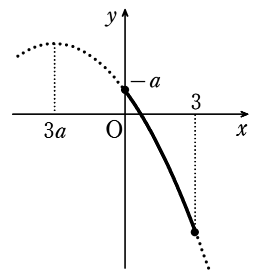
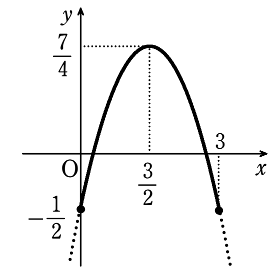
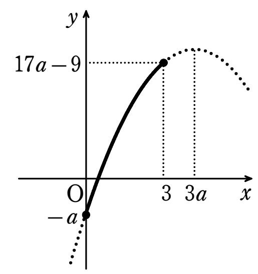
[1]　$a \leqq 0$ のとき　$x=0$ で最大値 $-a$

[2]　$0<a<1$ のとき　$x=3a$ で最大値 $9a^2-a$

[3]　$1 \leqq a$ のとき　$x=3$ で最大値 $-3^2+6a\cdot 3-a=17a-9$

次に，最小値については，

[1]　$3a<\frac{3}{2}$　　　　[2]　$3a=\frac{3}{2}$　　　　[3]　$\frac{3}{2}<3a$

[1]　$a<\frac{1}{2}$ のとき　$x=3$ で最小値 $17a-9$

[2]　$a=\frac{1}{2}$ のとき　$x=0$, 3 で最小値 $-\frac{1}{2}$

[3]　$\frac{1}{2}<a$ のとき　$x=0$ で最小値 $-a$