名古屋大学　2000年度入試問題

1 ○[文210]放物線の接線の係数の存在範囲,面積の最小値と係数決定[2000 数学ⅠⅡAB(文理)210]

a，b を実数とする．xy 平面上で，直線 $l: y=ax+b$ は曲線 $C: y=(x+1)(2-x)$ と，x 座標が $0\leqq x\leqq 2$ を満たす点で接しているとする．

(1)　このときの点 $(a,\ b)$ の存在範囲を求め，ab 平面上に図示せよ．

(2)　曲線 C および 3 つの直線 l，$x=0$，$x=2$ で囲まれた図形の面積を最小にする a，b の値と，このときの面積を求めよ．

解説

(1)　$ax+b=(x+1)(2-x)$ とおくと　$x^2+(a-1)x+b-2=0$ …… ①

この方程式の判別式を D とすると　$D=(a-1)^2-4(b-2)$

l と C が接するとき，$D=0$ であるから　$(a-1)^2-4(b-2)=0$

よって　　$b=\dfrac{1}{4}(a-1)^2+2$

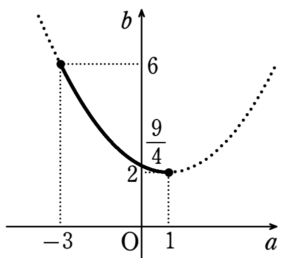
このとき，① の重解は　$x=-\dfrac{a-1}{2}$

これが $0\leqq x\leqq 2$ を満たすから　$0\leqq -\dfrac{a-1}{2}\leqq 2$

ゆえに　　$-3\leqq a\leqq 1$ …… ②

したがって，点 $(a,\ b)$ の存在範囲は

放物線 $b=\dfrac{1}{4}(a-1)^2+2$ の $-3\leqq a\leqq 1$ の部分．[図]



(2)　$0\leqq x\leqq 2$ において $ax+b\geqq (x+1)(2-x)$ であるから，C と 3 直線で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S=\int_0^2\{(ax+b)-(x+1)(2-x)\}dx$$
$$=\int_0^2\{x^2+(a-1)x+b-2\}dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{a-1}{2}x^2+(b-2)x\right]_0^2$$
$$=2a+2b-\frac{10}{3}$$
$$=2a+2\left\{\frac{1}{4}(a-1)^2+2\right\}-\frac{10}{3}$$
$$=\frac{1}{2}a^2+a+\frac{7}{6}$$
$$=\frac{1}{2}(a+1)^2+\frac{2}{3}$$

よって，② の範囲で S は　$a=-1$ のとき最小値 $\dfrac{2}{3}$ をとる．

また，$a=-1$ のとき　$b=3$

2 ●[理242]座標空間内の立方体の影の面積[2000 数学ⅠⅡAB(理)242]

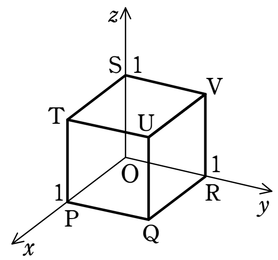
座標空間内の 6 つの平面 $x=0$，$x=1$，$y=0$，$y=1$，$z=0$，$z=1$ で囲まれた立方体を C とする．$\vec{l}=(-a_1,\ -a_2,\ -a_3)$ を $a_1>0$，$a_2>0$，$a_3>0$ を満たし，大きさが 1 のベクトルとする．H を原点 O を通りベクトル $\vec{l}$ に垂直な平面とする．

このとき，ベクトル $\vec{l}$ を進行方向にもつ光線により平面 H に生じる立方体 C の影の面積を，a_1，a_2，a_3 を用いて表せ．ここに，C の影とは C 内の点から平面 H へ引いた垂線の足全体のなす図形である．

解説

右図のように，頂点 P，Q，R，S，T，U，V を定める．

3 つの四角形 OPQR，OPTS，ORVS を L，M，N とする．



座標空間内の点 X の光線の影を X_1 とすると　$\overrightarrow{XX_1}=t\vec{l}$

(t は実数) と表される．

よって　　$\overrightarrow{OX_1}=\overrightarrow{OX}+t\vec{l}$ …… ①

また，$\overrightarrow{OX_1}\perp\vec{l}$ から　$\overrightarrow{OX_1}\cdot\vec{l}=0$

これに ① を代入すると　$\overrightarrow{OX}\cdot\vec{l}+t|\vec{l}|^2=0$

$|\vec{l}|=1$ であるから　$t=-\overrightarrow{OX}\cdot\vec{l}$

① に代入すると　$\overrightarrow{OX_1}=\overrightarrow{OX}-(\overrightarrow{OX}\cdot\vec{l})\vec{l}$

よって　　$\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP}-(\overrightarrow{OP}\cdot\vec{l})\vec{l}=(1,\ 0,\ 0)+a_1\vec{l}=(1-a_1{}^2,\ -a_1a_2,\ -a_1a_3)$

同様にして　$\overrightarrow{OR_1}=(-a_1a_2,\ 1-a_2{}^2,\ -a_2a_3)$

L の影 L_1 は，2 辺 OP_1，OR_1 を隣辺とする平行四辺形であるから，その面積 A は

$$A=\sqrt{|\overrightarrow{OP_1}|^2|\overrightarrow{OR_1}|^2-(\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OR_1})^2}$$

ここで

$$|\overrightarrow{OP_1}|^2=(1-a_1{}^2)^2+(-a_1a_2)^2+(-a_1a_3)^2$$
$$=1-2a_1{}^2+a_1{}^2(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2)$$
$$=1-a_1{}^2$$

同様にして　$|\overrightarrow{OR_1}|^2=1-a_2{}^2$

$$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OR_1}=(1-a_1{}^2)(-a_1a_2)+(-a_1a_2)(1-a_2{}^2)+(-a_1a_3)(-a_2a_3)$$
$$=a_1a_2(-2+a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2)$$
$$=-a_1a_2$$

ゆえに　　$A=\sqrt{(1-a_1{}^2)(1-a_2{}^2)-(-a_1a_2)^2}$

$$=\sqrt{1-a_1{}^2-a_2{}^2}=\sqrt{a_3{}^2}=a_3$$

同様にして，M，N の影の面積はそれぞれ　a_2，a_1

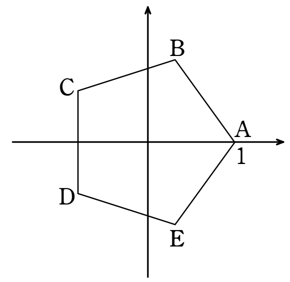
よって，求める面積は　$a_1+a_2+a_3$

3 ○[文250]正五角形の中点が満たす方程式の証明と解[2000 数学ⅠⅡAB(文理)250]

複素数平面上に，図のような原点を中心とする正五角形 ABCDE がある．ここで，頂点 A が表す複素数は 1 である．2 頂点 C，D の中点を F とし，点 F が表す複素数を h とする．

(1)　h が $4h^2+2h-1=0$ を満たすことを示せ．

(2)　h を求めよ．



解説

原点を O とすると　$\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\dfrac{360^\circ}{5}=72^\circ$

(1)　B が表す複素数を α とすると　$\alpha=\cos72^\circ+i\sin72^\circ$ …… ①

C，D が表す複素数は，それぞれ　α^2，α^3

よって　　$h=\dfrac{\alpha^2+\alpha^3}{2}$

また，① から　　$\alpha^5=\cos360^\circ+i\sin360^\circ=1$

ゆえに　　$\alpha^5-1=0$

すなわち　$(\alpha-1)(\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$

$\alpha\neq1$ であるから　$\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$

このとき

$$4h^2+2h-1=4\left(\frac{\alpha^2+\alpha^3}{2}\right)^2+2\cdot\frac{\alpha^2+\alpha^3}{2}-1$$
$$=(\alpha^4+2\alpha^5+\alpha^6)+\alpha^2+\alpha^3-1$$
$$=\alpha^4+2+\alpha+\alpha^2+\alpha^3-1$$
$$=\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1$$
$$=0$$

(2)　$4h^2+2h-1=0$ から　　$h=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

$h<0$ であるから　$h=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$

4 ●[理260]3次方程式の解の等式と三角形の形状から実数係数の組[2000 数学ⅠⅡAB(理)260]

実数を係数とする3次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ は，相異なる虚数解 α，β と実数解 γ をもつとする．

(1) $\beta=\overline{\alpha}$ が成り立つことを証明せよ．ここで，$\overline{\alpha}$ は α と共役な複素数を表す．

(2) α，β，γ が等式 $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$ を満たし，更に複素数平面上で α，β，γ を表す3点は1辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形をなすものとする．このとき，実数の組 $(p,\ q,\ r)$ をすべて求めよ．

解説

(1) α が $x^3+px^2+qx+r=0$ の解であるから　$\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r=0$

このとき　$\overline{\alpha}^3+p\overline{\alpha}^2+q\overline{\alpha}+r=\overline{\alpha^3}+\overline{p\alpha^2}+\overline{q\alpha}+\overline{r}$

$=\overline{\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r}=\overline{0}=0$

$\beta\neq\alpha$ であるから $\beta=\overline{\alpha}$ が成り立つ．

(2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$ から　$q=3$

複素数平面上において，γ を表す点は実軸上にあり，α，β を表す2点は実軸に関して対称な位置にある．

ここで，α の虚部を正，β の虚部を負とする．

α，β，γ を表す3点は1辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形をなすから

$$(\alpha,\ \beta)=\left(\gamma+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \gamma+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\cdots\cdots ①$$

または

$$(\alpha,\ \beta)=\left(\gamma-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \gamma-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\cdots\cdots ②$$

と表される．

① のとき

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$ から　$\alpha\overline{\alpha}+\gamma(\alpha+\overline{\alpha})-3=0$

よって　$\left(\gamma+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}+\gamma(2\gamma+3)-3=0$

ゆえに　$\gamma=0,\ -2$

$p=-(\alpha+\beta+\gamma)=-(3\gamma+3)$,

$r=-\alpha\beta\gamma=-(\gamma^2+3\gamma+3)\gamma$ から　$(p,\ q,\ r)=(-3,\ 3,\ 0),\ (3,\ 3,\ 2)$

② のとき

① のときと同様に考えて　$\left(\gamma-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}+\gamma(2\gamma-3)-3=0$

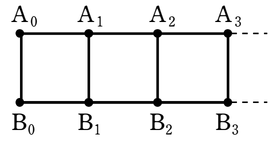
ゆえに　$\gamma=0,\ 2$

$p=-(\alpha+\beta+\gamma)=-(3\gamma-3)$,

$r=-\alpha\beta\gamma=-(\gamma^2-3\gamma+3)\gamma$ から　$(p,\ q,\ r)=(3,\ 3,\ 0),\ (-3,\ 3,\ -2)$

以上から　$(p,\ q,\ r)=(-3,\ 3,\ 0),\ (3,\ 3,\ 2),\ (3,\ 3,\ 0),\ (-3,\ 3,\ -2)$

5 ●[理289]平面上の梯子状の図形上の動点と確率[2000 数学ⅠⅡAB(理)289]



図のように，平面上に点 A_0，A_1，A_2，……，および B_0，B_1，B_2，…… が並んでいる．点Pは A_0 から出発し，次の規則に従いこれらの点の上を移動する．

Pが A_n にいるときには1秒後に A_{n+1} または B_n に，一方 B_n にいるときには B_{n+1} または A_n に移動する．

ただし，前にいた点には戻らない．また，Pが移動しうる点が複数あるときには，それぞれの点へ等確率で移動する．

Pが A_n へ到る行き方が a_n 通り，B_n へ到る行き方が b_n 通りあるとする．

(1) a_3，b_3 を求めよ．

(2) a_n，b_n を求めよ．

(3) 一方，点Qは A_8 からPと同時に出発し，1秒ごとに順次 $A_8\longrightarrow A_7\longrightarrow A_6\longrightarrow\cdots\cdots\longrightarrow A_0$ と移動し，その後は A_0 にとどまる．PとQが出会う確率を求めよ．

解説

(1) A_3 へ到る行き方は，

線分 A_0A_1，B_0B_1 のいずれか一方を通り，

線分 A_1A_2，B_1B_2 のいずれか一方を通り，

線分 A_2A_3，B_2B_3 のいずれか一方を通る．

よって　$a_3=2^3=8$

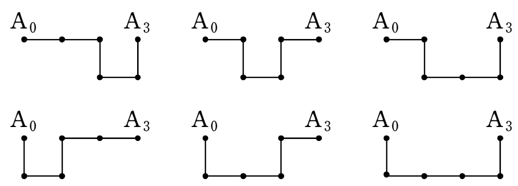
また，B_3 へ到る行き方も同様に考えて　$b_3=2^3=8$

(2) (1) から　$a_n=b_n=2^n$

(3) 出会う点は A_3 または A_4 である．

A_4 で出会う確率は　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{16}$

A_3 で出会うときの A_3 までの行き方は



であるから，A_3 で出会う確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot1\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$+\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot1+\frac{1}{2}\cdot1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$=\frac{9}{16}$$

よって，求める確率は　$\dfrac{1}{16}+\dfrac{9}{16}=\dfrac{5}{8}$

$\boxed{6}$ ○[3C12]双曲線と直線.1点で交わる,2交点の中点の軌跡が双曲線[2000 数学ⅢC12]

座標平面上に，双曲線 $C: x^2-y^2=1$ と点 A$(2,\ 0)$ がある．

(1) 点 A を通り双曲線 C と 1 点のみで交わる直線を求めよ．

(2) 直線 l が点 A を通り双曲線 C と相異なる 2 点で交わるように動くとき，この 2 点の中点は，あるひとつの双曲線上にあることを示せ．

解説

(1) 直線 $x=2$ は 2 点で交わるから適さない．

ゆえに，求める直線は $y=m(x-2)$ とおける．

$x^2-y^2=1$ から　$x^2-m^2(x-2)^2=1$

よって　$(1-m^2)x^2+4m^2x-4m^2-1=0$ ……①

$1-m^2 \neq 0$　かつ　$D/4=3m^2+1=0$ を満たす m は存在しないから，① がただ 1 つの解をもつ条件は

$1-m^2=0$　かつ　$4m^2 \neq 0$ から　$m=\pm 1$

したがって，求める直線は　$y=\pm(x-2)$

(2) 2 交点の中点を M$(X,\ Y)$ とおく．

[1]　$l: x=2$ のとき　M$(2,\ 0)$ となる．

[2]　$l: y=m(x-2)$ のとき

① の解を $x=\alpha,\ \beta$ とする．(ただし，$m \neq \pm 1$)

$X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{2m^2}{m^2-1}$ ……②,　　$Y=m(X-2)$ ……③

$X=2$ とすると，② から　$2m^2-2=2m^2$ となり，適さない．

ゆえに，$X \neq 2$ であるから，③ より　$m=\dfrac{Y}{X-2}$

よって，② から　$\left\{\left(\dfrac{Y}{X-2}\right)^2-1\right\}X=2\left(\dfrac{Y}{X-2}\right)^2$

したがって　$Y^2(X-2)-X(X-2)^2=0$

$X \neq 2$ であるから　$Y^2-X(X-2)=0$

ゆえに　$(X-1)^2-Y^2=1$　ただし　$X \neq 2$

[1], [2] から，中点 M は双曲線 $(x-1)^2-y^2=1$ 上にある．

別解　(1)　点 A$(2,\ 0)$ を通り双曲線 $x^2-y^2=1$ と 1 点のみで交わる直線は，漸近線に平行である．

$\boxed{7}$ ●曲線(対数)と接線とx=0とx=e−1の面積の最小[2000]

e は自然対数の底，log は自然対数を表す．実数 $a,\ b$ に対して，直線 $l: y=ax+b$ は曲線 $C: y=\log(x+1)$ と，x 座標が $0 \leqq x \leqq e-1$ を満たす点で接しているとする．

(1) このとき，点 $(a,\ b)$ の存在範囲を求め，ab 平面上に図示せよ．

(2) 曲線 C および 3 つの直線 $l,\ x=0,\ x=e-1$ で囲まれた図形の面積を最小にする $a,\ b$ の値と，このときの面積を求めよ．

解説

(1)　$y=\log(x+1)$ から　$y'=\dfrac{1}{x+1}$

曲線 C 上の点 $(t,\ \log(t+1))$ における接線の方程式は

$y-\log(t+1)=\dfrac{1}{t+1}(x-t)$　すなわち　$y=\dfrac{1}{t+1}x-\dfrac{t}{t+1}+\log(t+1)$

これが直線 l に一致すると考えると

$a=\dfrac{1}{t+1},\ b=-\dfrac{t}{t+1}+\log(t+1),\ 0 \leqq t \leqq e-1$

が成り立つ．

このとき　$b=\dfrac{1}{t+1}-1-\log\dfrac{1}{t+1}=a-\log a-1$

また，$0 \leqq t \leqq e-1$ から $1 \leqq t+1 \leqq e$　　よって　$\dfrac{1}{e} \leqq \dfrac{1}{t+1} \leqq 1$

ゆえに，点 $(a,\ b)$ の存在範囲は，曲線 $b=a-\log a-1$ の $\dfrac{1}{e} \leqq a \leqq 1$ の部分である．

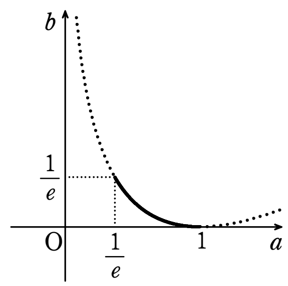
ここで　$b'=1-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-1}{a},\ b''=\dfrac{1}{a^2}$

$\dfrac{1}{e} \leqq a \leqq 1$ のとき　$b' \leqq 0$

また　$b''>0$

よって，$\dfrac{1}{e} \leqq a \leqq 1$ において，b は単調に減少し，曲線は下に凸である．

ゆえに，点 $(a,\ b)$ の存在範囲は右図の実線部分のようになる．



(2)　曲線 C および 3 つの直線 $l,\ x=0,\ x=e-1$ で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S=\int_0^{e-1}\{ax+b-\log(x+1)\}dx$$

$$=\left[\frac{a}{2}x^2+bx-(x+1)\log(x+1)+x\right]_0^{e-1}$$

$$=\frac{a}{2}(e-1)^2+b(e-1)-e+e-1$$

$$=\frac{a}{2}(e-1)^2+b(e-1)-1$$

ところで，$b=a-\log a-1$ であるから

$$S=\frac{a}{2}(e-1)^2+(a-\log a-1)(e-1)-1$$

$$=\frac{e^2-1}{2}a-(e-1)\log a-e$$

ゆえに　$\dfrac{dS}{da}=\dfrac{e^2-1}{2}-\dfrac{e-1}{a}=\dfrac{(e-1)\{(e+1)a-2\}}{2a}$

$\dfrac{dS}{da}=0$ とすると　$a=\dfrac{2}{e+1}$

よって，$\dfrac{1}{e} \leqq a<1$ における S の増減表は次のようになる．

a	$\dfrac{1}{e}$	…	$\dfrac{2}{e+1}$	…	1
$\dfrac{dS}{da}$		−	0	+	
S		↘	極小	↗	

ゆえに，$a=\dfrac{2}{e+1}$ のとき，S は極小かつ最小となる．

このとき　$b=\dfrac{2}{e+1}-\log\dfrac{2}{e+1}-1=\log\dfrac{e+1}{2}-\dfrac{e-1}{e+1}$

$$S=\frac{e^2-1}{2}\cdot\frac{2}{e+1}-(e-1)\log\frac{2}{e+1}-e=(e-1)\log\frac{e+1}{2}-1$$

以上により，$a=\dfrac{2}{e+1},\ b=\log\dfrac{e+1}{2}-\dfrac{e-1}{e+1}$ のとき S は

最小値 $(e-1)\log\dfrac{e+1}{2}-1$ をとる．

$\boxed{8}$ ●$0\leqq a\leqq 2b\leqq c\leqq n$を満たす整数の組(a, b, c)の個数. n=5, 奇数[2000]

自然数 n に対して，不等式 $0\leqq a\leqq 2b\leqq c\leqq n$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ の個数を $P(n)$ とする．

(1)　$P(5)$ を求めよ．

(2)　奇数 n に対して，$P(n)$ を求めよ．

解説

(1)　$0\leqq a\leqq 2b\leqq c\leqq 5$ …… ① とする．

$0\leqq 2b\leqq 5$ で，b は整数であるから　$b=0,\ 1,\ 2$

[1]　$b=0$ のとき，$0\leqq a\leqq 2\cdot 0$ を満たす整数 a は $a=0$ の 1 個ある．

また，$2\cdot 0\leqq c\leqq 5$ を満たす整数 c は $c=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ の 6 個ある．

よって，$b=0$ のとき不等式 ① を満たす整数の組は $1\times 6=6$ (個) ある．

[2]　$b=1$ のとき，$0\leqq a\leqq 2\cdot 1$ を満たす整数 a は $a=0,\ 1,\ 2$ の 3 個ある．

また，$2\cdot 1\leqq c\leqq 5$ を満たす整数 c は $c=2,\ 3,\ 4,\ 5$ の 4 個ある．

よって，$b=1$ のとき不等式 ① を満たす整数の組は $3\times 4=12$ (個) ある．

[3]　$b=2$ のとき，$0\leqq a\leqq 2\cdot 2$ を満たす整数 a は $a=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ の 5 個ある．

また，$2\cdot 2\leqq c\leqq 5$ を満たす整数 c は $c=4,\ 5$ の 2 個ある．

よって，$b=2$ のとき不等式 ① を満たす整数の組は $5\times 2=10$ (個) ある．

以上により　　$P(5)=6+12+10=28$

(2)　n が奇数のとき $n=2k-1$ (k は自然数) とおける．

$0\leqq 2b\leqq 2k-1$ から　$0\leqq b\leqq k-\dfrac{1}{2}$

$b,\ k$ は整数であるから　$0\leqq b\leqq k-1$

$b=b'$ $(0\leqq b'\leqq k-1)$ のとき，$0\leqq a\leqq 2b'$ を満たす整数 a の個数は

$2b'-0+1=2b'+1$ (個)

また，$2b'\leqq c\leqq 2k-1$ を満たす整数 c の個数は

$(2k-1)-2b'+1=2(k-b')$ (個)

よって

$$\begin{aligned}P(n)&=\sum_{b'=0}^{k-1}(2b'+1)\times 2(k-b')=\sum_{i=1}^{k}(2i-1)\times 2(k-i+1)\\&=2\sum_{i=1}^{k}\{-2i^2+(2k+3)i-(k+1)\}\\&=-4\sum_{i=1}^{k}i^2+2(2k+3)\sum_{i=1}^{k}i-2(k+1)\sum_{i=1}^{k}1\\&=-4\cdot\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+2(2k+3)\cdot\frac{1}{2}k(k+1)-2(k+1)\cdot k\\&=\frac{1}{3}k(k+1)\{-2(2k+1)+3(2k+3)-2\cdot 3\}=\frac{1}{3}k(k+1)(2k+1)\end{aligned}$$

ここで，$k=\dfrac{n+1}{2}$ であるから　$k+1=\dfrac{n+3}{2}$，$2k+1=n+2$

ゆえに　$P(n)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{n+1}{2}\times\dfrac{n+3}{2}\times(n+2)=\dfrac{1}{12}(n+1)(n+2)(n+3)$

$\boxed{9}$ ○点Pから△ABCのxy平面への射影の面積[2000]

座標空間内に 4 点 $\mathrm{P}(3,\ 1,\ 4)$，$\mathrm{A}(1,\ 2,\ 3)$，$\mathrm{B}(1,\ 1,\ 2)$，$\mathrm{C}(2,\ 1,\ 1)$ がある．直線 PA と xy 平面の交点を A′，直線 PB と xy 平面の交点を B′，直線 PC と xy 平面の交点を C′ とする．

(1)　△ABC の面積を求めよ．

(2)　△A′B′C′ の面積を求めよ．

解説

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,\ -1,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,\ -1,\ -2)$ であるから

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{0^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2)=3$

よって　$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\dfrac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ゆえに $0°<\angle\mathrm{BAC}<180°$ であるから

$$\sin\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{BAC}}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

したがって　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\angle\mathrm{BAC}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

別解　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{2})^2(\sqrt{6})^2-3^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　O を原点とする．

直線 PA 上の点を $\mathrm{P}_1(x,\ y,\ z)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ (t は実数)　と表される．

これから　$(x,\ y,\ z)=(3,\ 1,\ 4)+t(-2,\ 1,\ -1)$
$=(3-2t,\ 1+t,\ 4-t)$

ゆえに　$x=3-2t$，$y=1+t$，$z=4-t$

$z=0$ とすると，$4-t=0$ から　$t=4$

このとき　$x=-5$，$y=5$　　よって　$\mathrm{A}'(-5,\ 5,\ 0)$

同様に，直線 PB 上の点を $\mathrm{P}_2(x,\ y,\ z)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ (s は実数)　と表される．

これから　$(x,\ y,\ z)=(3,\ 1,\ 4)+s(-2,\ 0,\ -2)$
$=(3-2s,\ 1,\ 4-2s)$

ゆえに　$x=3-2s$，$y=1$，$z=4-2s$

$z=0$ とすると，$4-2s=0$ から　$s=2$

このとき　$x=-1$，$y=1$　　よって　$\mathrm{B}'(-1,\ 1,\ 0)$

更に同様に，直線 PC 上の点を $\mathrm{P}_3(x,\ y,\ z)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}_3}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+u\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ (u は実数)　と表される．

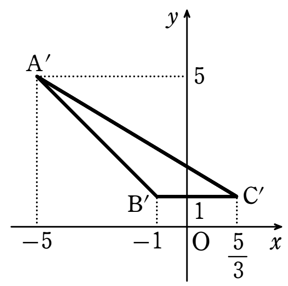
これから　$(x,\ y,\ z)=(3,\ 1,\ 4)+u(-1,\ 0,\ -3)$
$=(3-u,\ 1,\ 4-3u)$

ゆえに　$x=3-u$，$y=1$，$z=4-3u$

$z=0$ とすると，$4-3u=0$ から　$u=\dfrac{4}{3}$

このとき　$x=\dfrac{5}{3}$，$y=1$　　よって　$\mathrm{C}'\left(\dfrac{5}{3},\ 1,\ 0\right)$

ゆえに，右図から



$\triangle\mathrm{A'B'C'}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{5}{3}-(-1)\right\}(5-1)=\dfrac{16}{3}$

$\boxed{10}$ ○双曲線と直線の2交点の中点の軌跡の証明[2000]

座標平面上に，双曲線 $C : x^2-y^2=1$ と点 A $(2,\ 0)$ がある．点 A を通る直線 l が双曲線 C と異なる 2 点で交わるとき，この 2 つの交点を結ぶ線分の中点 P は曲線 $(x-1)^2-y^2=1$ 上にあることを証明せよ．

解説

[1]　l が x 軸に垂直であるとき

l の方程式は $x=2$ で，双曲線 C は x 軸に関して対称であるから，l と C の 2 つの交点を結ぶ線分の中点 P の座標は $(2,\ 0)$ である．

この点は，曲線 $(x-1)^2-y^2=1$ 上にある．

[2]　l が x 軸に垂直でないとき

l の方程式は m は実数として $y=m(x-2)$ とおける．

l と C の方程式から　$x^2-m^2(x-2)^2=1$

すなわち　$(1-m^2)x^2+4m^2x-(4m^2+1)=0$ …… ①

l と C が異なる 2 点で交わるとき，方程式 ① は異なる 2 つの実数解をもつから

$1-m^2 \neq 0$ で，① の判別式を D とすると　$D>0$

ここで　$\dfrac{D}{4}=(2m^2)^2-(1-m^2)\{-(4m^2+1)\}=3m^2+1$

ゆえに，$D>0$ は常に成り立つ．

したがって，m の条件は $1-m^2 \neq 0$ から　$m \neq \pm 1$

このとき，① の 2 つの実数解を α，β とすると，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=\frac{4m^2}{m^2-1}$$

2 つの交点を結ぶ線分の中点 P の座標を $(X,\ Y)$ とおくと

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2m^2}{m^2-1}$$

また，P は直線 l 上の点であるから

$$Y=m(X-2)=m\left(\frac{2m^2}{m^2-1}-2\right)=\frac{2m}{m^2-1}$$

したがって

$$(X-1)^2-Y^2=\left(\frac{2m^2}{m^2-1}-1\right)^2-\left(\frac{2m}{m^2-1}\right)^2$$

$$=\frac{(m^2+1)^2-4m^2}{(m^2-1)^2}=\frac{(m^2-1)^2}{(m^2-1)^2}=1$$

よって，点 P は曲線 $(x-1)^2-y^2=1$ 上にある．