# 名古屋大学　2001年度入試問題

$\boxed{1}$ ●[文24]絶対値付き関数の合成関数g(x). g(x)=c (0<c<1) の解法[2001 数学ⅠⅡAB(文理)24]

関数 $f(x)=-|2x-1|+1$ $(0\leqq x\leqq 1)$ を用いて，関数 $g(x)=-|2f(x)-1|+1$ $(0\leqq x\leqq 1)$ を考える．$0<c<1$ のとき，$g(x)=c$ を満たす $x$ を求めよ．

解説

$g(x)=-\left|\,2\{-|2x-1|+1\}-1\right|+1$

$\quad=-\left|\,2|2x-1|-1\right|+1$

$0\leqq x\leqq \dfrac{1}{2}$ のとき　$g(x)=-|-4x+2-1|+1=-|4x-1|+1$

ゆえに　$0\leqq x\leqq \dfrac{1}{4}$ のとき　$g(x)=4x$

$\qquad\dfrac{1}{4}<x\leqq \dfrac{1}{2}$ のとき　$g(x)=-4x+2$

$\dfrac{1}{2}<x\leqq 1$ のとき　$g(x)=-|4x-2-1|+1=-|4x-3|+1$

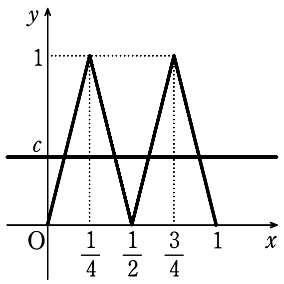
ゆえに　$\dfrac{1}{2}<x\leqq \dfrac{3}{4}$ のとき　$g(x)=4x-2$

$\qquad\dfrac{3}{4}<x\leqq 1$ のとき　$g(x)=-4x+4$

以上から

$y=g(x)$ のグラフは右図のようになる．

$0<c<1$ であるから，右のグラフより $g(x)=c$ を満たす $x$ は　$x=\dfrac{c}{4}$，$\dfrac{2-c}{4}$，$\dfrac{2+c}{4}$，$\dfrac{4-c}{4}$




$\boxed{2}$ ●[文179]3次曲線の接線が1本の証明. 正の傾きをもつ条件[2001 数学ⅠⅡAB(文理)179]

$a$，$b$，$c$ は定数とし，$a>0$ とする．

(1)　曲線 $y=-ax^3+bx+c$ の接線で点 $(0,\ t)$ ($t$ は実数) を通るものがただ 1 本存在することを示せ．

(2)　(1) の接線が正の傾きをもつための $t$ の値の範囲を求めよ．

解説

(1)　$y=-ax^3+bx+c$ から　$y'=-3ax^2+b$

よって，接点の座標を $(p,\ -ap^3+bp+c)$ とすると，接線の方程式は

$$y-(-ap^3+bp+c)=(-3ap^2+b)(x-p)$$

すなわち　$y=(-3ap^2+b)x+2ap^3+c$ …… ①

直線 ① が点 $(0,\ t)$ を通るから　$2ap^3+c=t$

$a>0$ から　$p^3=\dfrac{t-c}{2a}$　　ゆえに　$p=\sqrt[3]{\dfrac{t-c}{2a}}$

よって，接点がただ 1 つであるから，点 $(0,\ t)$ を通る接線はただ 1 本存在する．

(2)　$-3ap^2+b>0$ とすると　$3ap^2<b$ …… ②

ここで，$a>0$，$p^2\geqq 0$

よって，$b\leqq 0$ のとき ② を満たす $p$ は存在しない．

ゆえに，接線の傾きが正となる $t$ は存在しない．

$b>0$ のとき ② から

$$-\sqrt{\frac{b}{3a}}<p<\sqrt{\frac{b}{3a}}$$

ゆえに　$-\dfrac{b}{3a}\sqrt{\dfrac{b}{3a}}<p^3<\dfrac{b}{3a}\sqrt{\dfrac{b}{3a}}$

よって，(1) から

$$-\frac{b}{3a}\sqrt{\frac{b}{3a}}<\frac{t-c}{2a}<\frac{b}{3a}\sqrt{\frac{b}{3a}}$$

$a>0$ から

$$c-\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3a}}<t<c+\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3a}}$$

$\boxed{3}$ ●[文216]条件を満たす曲線の方程式.直線と接する条件[2001 数学ⅠⅡＡＢ(文理)216]

$a$，$b$ を正の定数とし，平面ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2a,\ a)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(0,\ 2b)$ を考える．線分 OB の中点を C とする．直線 OA，OB 上にない平面上の点 P に対し，点 P を通り，直線 OB に平行な直線と直線 OA との交点を Q とし，点 P を通り，直線 OA に平行な直線と直線 OB との交点を R とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表される．ただし，$s$，$t$ は実数である．次のものを求めよ．

(1)　$k$ を正の定数とするとき，$t=(s-k)^2$ を満たす点 P のなす曲線 $F$ の方程式

(2)　直線 AC が $F$ と接するとき，$k$ の値

解説

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であり，かつ点 P は直線 OA，OB 上にないから

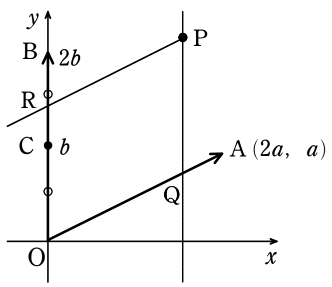
$s\neq 0$，$t\neq 0$

また　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$ とおくと

$(x,\ y)=s(2a,\ a)+t(0,\ 2b)$

$=(2as,\ as+2bt)$ ……①




よって　$\begin{cases} s=\dfrac{x}{2a} \\ t=\dfrac{y-as}{2b}=\dfrac{2y-x}{4b} \end{cases}$

$t=(s-k)^2$ ……② から　$\dfrac{2y-x}{4b}=\left(\dfrac{x}{2a}-k\right)^2$

ゆえに　$y=2b\left(\dfrac{x}{2a}-k\right)^2+\dfrac{x}{2}$

$=\dfrac{b}{2a^2}x^2+\dfrac{a-4bk}{2a}x+2bk^2$ ……③

② で　$s=0$ とすると　$t=k^2$

よって，① から　$(x,\ y)=(0,\ 2bk^2)$ ……④

② で　$t=0$ とすると　$s=k$

よって，① から　$(x,\ y)=(2ak,\ ak)$ ……⑤

③，④，⑤ から，曲線 $F$ の方程式は

$y=\dfrac{b}{2a^2}x^2+\dfrac{a-4bk}{2a}x+2bk^2$

ただし，$(x,\ y)\neq(0,\ 2bk^2)$，$(x,\ y)\neq(2ak,\ ak)$

(2)　直線 AC の方程式は　$y=\dfrac{a-b}{2a}x+b$ ……⑥

直線 AC と曲線 $F$ が接するから，③，⑥ より

$$\frac{b}{2a^2}x^2+\frac{a-4bk}{2a}x+2bk^2=\frac{a-b}{2a}x+b$$

すなわち　$x^2-(4k-1)ax+2a^2(2k^2-1)=0$

の判別式 $D$ について　$D=0$

よって　$(16k^2-8k+1-16k^2+8)a^2=0$

$a\neq 0$ であるから　$k=\dfrac{9}{8}$

$\boxed{4}$ ●[理216]2つの三角形の外心が一致するときの条件[2001 数学ⅠⅡＡＢ(理)216]

△ABC の外心(外接円の中心) O が三角形の内部にあるとし，$\alpha$，$\beta$，$\gamma$ は

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

を満たす正の数であるとする．また，直線 OA，OB，OC がそれぞれ辺 BC，CA，AB と交わる点を A′，B′，C′ とする．

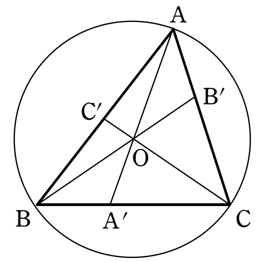
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\alpha$，$\beta$，$\gamma$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ を表せ．

(2)　△A′B′C′ の外心が O に一致すれば $\alpha=\beta=\gamma$ であることを示せ．

解説

(1)　$\alpha>0$　かつ　$\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ から

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\dfrac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\dfrac{\gamma}{\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$




また，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ $(k<0)$ とおける．

$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=k\left(-\dfrac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\dfrac{\gamma}{\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$

点 A′ は辺 BC 上にあるから　$-\dfrac{\beta}{\alpha}k-\dfrac{\gamma}{\alpha}k=1$

よって　$\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha}k=-1$

$\beta+\gamma>0$ であるから　$k=-\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=-\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

(2)　△ABC の外接円の半径を $R$ とすると，(1) から

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}|=\frac{\alpha}{\beta+\gamma}R$$

同様にして　$|\overrightarrow{\mathrm{OB'}}|=\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}R$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC'}}|=\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}R$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC'}}|$ から　$\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}=\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}=\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}$

この式の値を $p$ とおくと

$\alpha=p(\beta+\gamma)$，$\beta=p(\gamma+\alpha)$，$\gamma=p(\alpha+\beta)$

辺々を加えると　$\alpha+\beta+\gamma=2p(\alpha+\beta+\gamma)$

よって　$(2p-1)(\alpha+\beta+\gamma)=0$

$\alpha+\beta+\gamma>0$ から　$p=\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$\alpha=\dfrac{\beta+\gamma}{2}$ ……①，$\beta=\dfrac{\gamma+\alpha}{2}$ ……②，$\gamma=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ ……③

①－② から　$\alpha-\beta=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$

よって　$\dfrac{3}{2}(\alpha-\beta)=0$　　ゆえに　$\alpha=\beta$

これと ③ から　$\alpha=\beta=\gamma$

$\boxed{5}$ ●[理234]有限複素数列と1の6乗根との関係.とり方の個数[2001 数学ⅠⅡＡＢ(理)234]

$n$ を 3 以上の自然数とする．有限複素数列 $z_1$，$z_2$，……，$z_n$ の各項はいずれも方程式 $z^6=1$ の解の 1 つであり，かつ，関係式 $z_1+z_2+\cdots\cdots+z_n=0$ を満たしているとする．

(1)　$z_1$，$z_2$，……，$z_n$ の中に 1 が含まれ，$-1$ が含まれていないとすれば，

$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ はいずれも $z_1$，$z_2$，……，$z_n$ の中に含まれることを示せ．

(2)　$n=6$ のとき，(1) のような複素数列 $z_1$，$z_2$，……，$z_6$ のとり方の個数を求めよ．

解説

(1)　$z^6=1$ から　$z=\cos(60°\times k)+i\sin(60°\times k)$（ただし，$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$）と表される．

$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ に対して

$$z=1,\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -1,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$z_1$，$z_2$，……，$z_n$ の中に

1 が $p$ 個，$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ が $q$ 個，$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ が $r$ 個，$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ が $s$ 個，

$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ が $t$ 個含まれるとすると，$z_1+z_2+\cdots\cdots+z_n=0$ から

$$p+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)q+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)r+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)s+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)t=0$$

すなわち　$p+\frac{1}{2}q-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{2}(q+r-s-t)i=0$

$p$，$q$，$r$，$s$，$t$ は実数であるから

$$\begin{cases} p+\frac{1}{2}q-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}t=0 \cdots\cdots ① \\ q+r-s-t=0 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① から　$r+s=2p+q+t$ …… ③

② から　$r-s=t-q$　　…… ④

③，④ から　$r=p+t$，$s=p+q$

$p\geqq1$，$q\geqq0$，$t\geqq0$ から　$r\geqq1$，$s\geqq1$

よって，$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ はいずれも必ず含まれている．

(2)　$n=6$ と (1) から

$$\begin{cases} p+q+r+s+t=6 \\ r=p+t \\ s=p+q \end{cases}$$

ゆえに　$p+q+p+t+p+q+t=6$

よって　$3p+2q+2t=6$ …… ⑤

$p\geqq1$，$q\geqq0$，$t\geqq0$ であり，かつ $p$，$q$，$t$ は整数であるから，⑤ を満たす $p$，$q$，$t$ の組は　$(p,\ q,\ t)=(2,\ 0,\ 0)$

ゆえに　$(p,\ q,\ r,\ s,\ t)=(2,\ 0,\ 2,\ 2,\ 0)$

よって，求める複素数列のとり方の個数は

$$\frac{6!}{2!2!2!}=90$$

$\boxed{6}$ ○[文255]16秒でサイレンの信号.2種類のサイレンの鳴らし方[2001 数学ⅠⅡＡＢ(文理)255]

サイレンを断続的に鳴らして 16 秒の信号を作る．ただし，サイレンは 1 秒または 2 秒鳴り続けて 1 秒休み，これを繰り返す．また，信号はサイレンの音で始まり，サイレンの音で終わるものとする．

(1)　1 秒または 2 秒鳴り続ける回数をそれぞれ $m$ 回，$n$ 回とするとき，$m$，$n$ の満たす関係式を求めよ．

(2)　信号は何通りできるか．

解説

(1)　$m+2n+(m+n-1)=16$ から　$2m+3n=17$

(2)　$m$，$n$ は負でない整数であるから　$(m,\ n)=(1,\ 5),\ (4,\ 3),\ (7,\ 1)$

よって　${}_6C_1+{}_7C_4+{}_8C_7={}_6C_1+{}_7C_3+{}_8C_1=6+\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}+8=49$（通り）

7 ●［理286］数直線上の動点の座標の期待値［2001 数学ⅠⅡＡＢ(理)286］

数直線上の原点Oから出発して，硬貨を投げながら駒を整数点上に動かすゲームを考える．毎回硬貨を投げて表が出れば $+1$，裏が出れば $-1$，それぞれ駒を進めるとする．ただし，点 $-1$ または点 3 に着いたときは以後そこに止まるものとする．

(1)　$k$ 回目に硬貨を投げた後，駒が点 1 にある確率を求めよ．

(2)　$k$ 回目に硬貨を投げた後，駒がある点 $X_k$ の期待値 $E(X_k)$ を求めよ．

解説

(1)　$n$ 回目に硬貨を投げた後，駒が点 $X_n$ にいる確率を $P_n(X_n)$ とすると

$$P_{k+1}(1)=\frac{1}{2}P_k(2)+\frac{1}{2}P_k(0) \quad \cdots\cdots ①$$

$$P_{k+1}(2)=\frac{1}{2}P_k(1) \quad \cdots\cdots ②$$

$$P_{k+1}(0)=\frac{1}{2}P_k(1) \quad \cdots\cdots ③$$

①，②，③から　$P_{k+2}(1)=\dfrac{1}{2}P_k(1)$

よって，$m$ を 1 以上の整数とすると

$k=2m$ のとき　$P_k(1)=P_{2m}(1)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^m P_0(1)=0$

$k=2m-1$ のとき　$P_k(1)=P_{2m-1}(1)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{m-1}P_1(1)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^m=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{k+1}{2}}$

(2)　$X_k=-1$ について

$k=1$ のとき　裏　　が出る．

$k=3$ のとき　表裏裏　の順に出る．

$k \geqq 5$ $(k=2m-1)$ のとき

まず，1 回目に表が出る．

2，3 回目に表が 1 回，裏が 1 回ずつ出る．

以後，同様にして，$2m-4$，$2m-3$ 回目にも表が 1 回，裏が 1 回ずつ出る．

更に，$2m-2$ 回目と $2m-1$ 回目には裏が出る．

よって，$k=2m-1$ のとき

$$\begin{aligned}P_k(-1)&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{m-2}\right\}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}}{1-\frac{1}{2}}\\&=\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\end{aligned}$$

$k=2m$ のとき

$P_k(-1)=P_{2m-1}(-1)\cdot 1=P_{2m-1}(-1)$

$X_k=3$ について

$X_k=-1$ のときと同様に考える．

$k=2m-1$ のとき

$$P_k(3)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-2}\left(\frac{1}{2}\right)^2=P_k(-1)-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$

$k=2m$ のとき

$P_k(3)=P_{2m-1}(3)\cdot 1=P_{2m-1}(3)$

また，(1)の結果と②，③から

$k=2m-1$ のとき　$P_k(2)=P_k(0)=0$

$k=2m$ のとき　$P_k(2)=P_k(0)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{m+1}$

以上から

$k=2m-1$ のとき

$$E(X_k)=-1\times\left\{\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\right\}+1\times\left(\frac{1}{2}\right)^m+3\left\{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\right\}=0$$

$k=2m$ のとき

$$E(X_k)=-1\times\left\{\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\right\}+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}+3\left\{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\right\}=0$$

別解　(2)　表が出て $+1$ だけ動いたときの増加量を $+1$，裏が出て $-1$ だけ動いたときの増加量を $-1$ とする．

$n$ 回目に硬貨を投げたときの増加量を $Y_n$ とする．

点 0，1，2 から移動するときの増加量の期待値を $E_1$，点 $-1$，3 から移動するときの増加量の期待値を $E_2$ とすると

$$E_1=1\times\frac{1}{2}+(-1)\times\frac{1}{2}=0,\quad E_2=0$$

ゆえに　$E(Y_n)=0$

よって

$$\begin{aligned}E(X_k)&=E(Y_1+Y_2+\cdots\cdots+Y_k)\\&=E(Y_1)+E(Y_2)+\cdots\cdots+E(Y_k)\\&=0\end{aligned}$$

8 ○［3C111］対数不等式の証明．平均値の定理利用［2001 数学ⅢＣ111］

$e$ を自然対数の底とする．$e \leqq p < q$ のとき，不等式

$$\log(\log q)-\log(\log p)<\frac{q-p}{e}$$

が成り立つことを証明せよ．

解説

$f(x)=\log(\log x)$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{1}{x\log x}$

区間 $p \leqq x \leqq q$ において，平均値の定理により，

$\log(\log q)-\log(\log p)=(q-p)\times\dfrac{1}{c\log c}$ となる $c$ が $p<c<q$ の範囲に少なくとも 1 つ存在する．

ここで，$e \leqq p < c$ から　$e<c<c\log c$

ゆえに　$\dfrac{1}{c\log c}<\dfrac{1}{e}$

よって，$p<q$ から　$\log(\log q)-\log(\log p)<\dfrac{q-p}{e}$

$\boxed{9}$ ●行列で表された数列の漸化式. 整数p, qの決定［2001］

ある正の整数 $p$, $q$ に対し,

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+2 & -2p \\ -2q & q+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を満たす正の数の数列 $\{a_n\}$ が存在するものとする. このとき, $p$, $q$ の値を求めよ.

解説

条件から $\begin{cases} a_{n+2} = (p+2)a_{n+1} - 2pa_n & \cdots\cdots ① \\ a_{n+1} = -2qa_{n+1} + (q+2)a_n & \cdots\cdots ② \end{cases}$

② から　$(2q+1)a_{n+1} = (q+2)a_n$

$q>0$ であるから　$a_{n+1} = \dfrac{q+2}{2q+1}a_n$

よって, 数列 $\{a_n\}$ は, 公比 $\dfrac{q+2}{2q+1}$ の等比数列である.

数列 $\{a_n\}$ の初項を $a$ (ただし, $a>0$) とし, $r = \dfrac{q+2}{2q+1}$ とおくと　$a_n = ar^{n-1}$

これが ① を満たすから　$ar^{n+1} = (p+2)ar^n - 2par^{n-1}$

$ar^{n-1} > 0$ であるから　$r^2 = (p+2)r - 2p$

ゆえに　$(r-2)(r-p) = 0$　　よって　$r = 2,\ p$

$r=2$ のとき　$\dfrac{q+2}{2q+1} = 2$　　ゆえに　$q+2 = 2(2q+1)$

これを解くと, $q=0$ となり不適.

$r=p$ のとき　$\dfrac{q+2}{2q+1} = p$　　ゆえに　$q+2 = p(2q+1)$

整理すると　$2pq+p-q=2$

すなわち　$4pq+2p-2q=4$

変形して　$(2p-1)(2q+1)=3$

$p$, $q$ は正の整数であるから, $2p-1$, $2q+1$ も正の整数である.

また　$2p-1 \geqq 1$, $2q+1 \geqq 3$

よって　$2p-1=1$, $2q+1=3$

したがって　$p=1$, $q=1$

$\boxed{10}$ ○絶対値付き関数の定積分で表された関数の最大, 最小［2001］

閉区間 $[0,\ 2\pi]$ で定義された $x$ の関数 $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin\left(|t-x| + \frac{\pi}{4}\right)dt$ の最大値および最小値とそのときの $x$ の値をそれぞれ求めよ.

解説

[1]　$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき

$$f(x) = \int_0^x \sin\left\{-(t-x)+\frac{\pi}{4}\right\}dt + \int_x^{\pi} \sin\left\{(t-x)+\frac{\pi}{4}\right\}dt$$

$$= \left[\cos\left(-t+x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^x + \left[-\cos\left(t-x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_x^{\pi}$$

$$= \sqrt{2} - \left\{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{5}{4}\pi - x\right)\right\}$$

$$= \sqrt{2} - 2\cos\frac{3}{4}\pi\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\sin x$$

ゆえに, $x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$ ;　$x=0$, $\pi$ のとき最小値 $\sqrt{2}$

[2]　$\pi \leqq x \leqq 2\pi$ のとき

$$f(x) = \int_0^{\pi} \sin\left\{-(t-x)+\frac{\pi}{4}\right\}dt$$

$$= \left[\cos\left(-t+x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= \cos\left(x-\frac{3}{4}\pi\right) - \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

ゆえに, $x=\pi$ のとき最大値 $\sqrt{2}$,　$x=\dfrac{7}{4}\pi$ のとき最小値 $-2$

[1], [2] から, $x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$,　$x=\dfrac{7}{4}\pi$ のとき最小値 $-2$