名古屋大学　2002年度入試問題

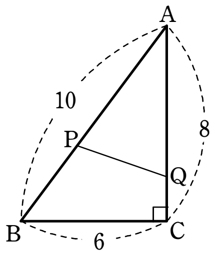
$\boxed{1}$ ●[文99]三角形の面積2等分の三角形の周の長さの最小と2辺[2002 数学ⅠⅡＡＢ(文理)99]

辺の長さがそれぞれ AB＝10，BC＝6，AC＝8 の △ABC がある．辺 AB 上に点 P，辺 AC 上に点 Q を，△APQ の面積が △ABC の面積の $\dfrac{1}{2}$ になるようにとる．

(1)　2 辺の長さの和 AP＋AQ を u とおく．△APQ の周の長さ l を u を用いて表せ．

(2)　l が最小となるときの AP，AQ，l の値を求めよ．

解説



(1)　AB : BC : CA＝5 : 3 : 4 から　∠C＝90°

ゆえに　$\cos A=\dfrac{4}{5}$，$\sin A=\dfrac{3}{5}$

AP＝x，AQ＝y とおく．

△APQ＝$\dfrac{1}{2}$△ABC から　$\dfrac{1}{2}xy\sin A=\dfrac{1}{2}\times 6\times 8\times\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$xy\times\dfrac{3}{5}=24$　　よって　$xy=40$

△APQ に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{PQ}^2=x^2+y^2-2xy\cos A=(x+y)^2-2xy\left(1+\frac{4}{5}\right)$$

$$=u^2-144$$

ゆえに　$\mathrm{PQ}=\sqrt{u^2-144}$

よって　$l=u+\sqrt{u^2-144}$ ……①

(2)　$u=x+y\geqq 2\sqrt{xy}=2\sqrt{40}=4\sqrt{10}$

等号成立は $x=y$ かつ $xy=40$　すなわち　$x=y=2\sqrt{10}$ のとき．

よって ① から，l は　AP＝AQ＝$2\sqrt{10}$ のとき

最小値 $4\sqrt{10}+\sqrt{160-144}=4(\sqrt{10}+1)$　をとる．

$\boxed{2}$ ●[文115，理118]5乗根(1+1/n)-1，1-5乗根(1-1/n)，1/(5n)の大小[2002 数学ⅠⅡＡＢ(理)118]

n を自然数とするとき，3 つの数 $a=\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{n}}-1$，$b=1-\sqrt[5]{1-\dfrac{1}{n}}$，$c=\dfrac{1}{5n}$ の大小を比較せよ．

解説

$\dfrac{1}{5n}=x$ とおくと，n は自然数であるから　$0<x\leqq\dfrac{1}{5}$ ……①

$a=\sqrt[5]{1+5x}-1$，$b=1-\sqrt[5]{1-5x}$，$c=x$

$b-c=1-x-\sqrt[5]{1-5x}$

$(1-x)^5-(1-5x)=10x^2-10x^3+5x^4-x^5$

$\qquad=10x^2(1-x)+x^4(5-x)$

① から　$10x^2(1-x)+x^4(5-x)>0$

ゆえに　$(1-x)^5>1-5x$　　よって　$b>c$

$c-a=x-\sqrt[5]{1+5x}+1=1+x-\sqrt[5]{1+5x}$

$(1+x)^5-(1+5x)=10x^2+10x^3+5x^4+x^5$

① から　$10x^2+10x^3+5x^4+x^5>0$

ゆえに　$(1+x)^5>1+5x$　　よって　$c>a$

以上から　$b>c>a$

$\boxed{3}$ ●[理124]x^a=y^b=z^c=xyzの正整数a，b，c[2002 数学ⅠⅡＡＢ(理)124]

関係式 $x^a=y^b=z^c=xyz$ を満たす 1 とは異なる 3 つの正の実数の組 $(x,\ y,\ z)$ が，少なくとも 1 組存在するような，正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ．ただし，$a\leqq b\leqq c$ とする．

解説

$x^a=y^b=z^c=xyz=10^k$ とおくと，$x>0$，$y>0$，$z>0$ から

$a\log_{10}x=b\log_{10}y=c\log_{10}z=\log_{10}x+\log_{10}y+\log_{10}z=k$

$a>0$，$b>0$，$c>0$ であるから　$\log_{10}x=\dfrac{k}{a}$，$\log_{10}y=\dfrac{k}{b}$，$\log_{10}z=\dfrac{k}{c}$

ゆえに　$\dfrac{k}{a}+\dfrac{k}{b}+\dfrac{k}{c}=k$

$x\neq 1$ であるから　$k\neq 0$　よって　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$ を満たすことが必要．

ここで，$1\leqq a\leqq b\leqq c$ であるから　$1\geqq\dfrac{1}{a}\geqq\dfrac{1}{b}\geqq\dfrac{1}{c}>0$

ゆえに　$1=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leqq\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a}=\dfrac{3}{a}$

よって　$a\leqq 3$

a は正の整数であるから　$a=1,\ 2,\ 3$

[1]　$a=1$ のとき　$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$ となり不適．

[2]　$a=2$ のとき　$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$ から　$bc=2b+2c$

ゆえに　$(b-2)(c-2)=4$ ……①

$2\leqq b\leqq c$ であるから　$0\leqq b-2\leqq c-2$

また，$b-2$，$c-2$ は整数であるから，

① より　$(b-2,\ c-2)=(1,\ 4),\ (2,\ 2)$

ゆえに　$(b,\ c)=(3,\ 6),\ (4,\ 4)$

[3]　$a=3$ のとき　$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{2}{3}$ から　$2bc=3b+3c$

よって　$4bc=6b+6c$

ゆえに　$(2b-3)(2c-3)=9$ ……②

$3\leqq b\leqq c$ であるから　$3\leqq 2b-3\leqq 2c-3$

また，$2b-3$，$2c-3$ は整数であるから，② より　$(2b-3,\ 2c-3)=(3,\ 3)$

ゆえに　$(b,\ c)=(3,\ 3)$

以上から　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$

逆に，これらの $(a,\ b,\ c)$ に対し，関係式を満たす 1 とは異なる正の実数の組

$(x,\ y,\ z)=\left(10^{\frac{1}{a}},\ 10^{\frac{1}{b}},\ 10^{\frac{1}{c}}\right)$ が存在する．

$\boxed{4}$ ●[文149]xy平面上の円の中心座標の数列. x座標の一般項[2002 数学ⅠⅡAB(文理)149]

次のように円 C_n を定める．まず，C_0 は $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円，C_1 は $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円とする．次に C_0，C_1 に外接し x 軸に接する円を C_2 とする．更に，$n=3$，4，5，…… に対し，順に，C_0，C_{n-1} に外接し x 軸に接する円で C_{n-2} でないものを C_n とする．C_n $(n\geqq 1)$ の中心の座標を $(a_n,\ b_n)$ とするとき，次の問いに答えよ．ただし，2 つの円が外接するとは，中心間の距離がそれぞれの円の半径の和に等しいことをいう．

(1)　$n\geqq 1$ に対し，$b_n=\dfrac{{a_n}^2}{2}$ を示せ．

(2)　a_n を求めよ．

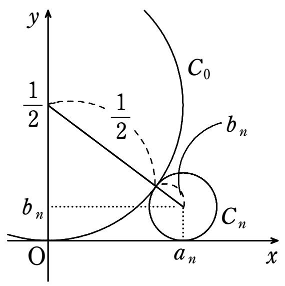
(解説)

(1)　C_n は，中心が $(a_n,\ b_n)$ であるから，半径は b_n である．

よって，右図から

$${a_n}^2+\left(\frac{1}{2}-b_n\right)^2=\left(\frac{1}{2}+b_n\right)^2$$

ゆえに　$b_n=\dfrac{{a_n}^2}{2}$



(2)　右図から　$(b_n+b_{n-1})^2=(b_{n-1}-b_n)^2+(a_{n-1}-a_n)^2$

ゆえに　$(a_{n-1}-a_n)^2=4b_nb_{n-1}$

よって，(1) から　$(a_{n-1}-a_n)^2={a_n}^2{a_{n-1}}^2$

$0<a_n<a_{n-1}$ であるから　$a_{n-1}-a_n=a_na_{n-1}$

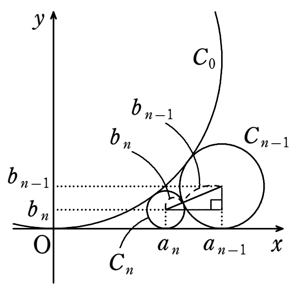
ゆえに　$\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n-1}}=1$

$a_1=1$ であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{1}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}\right)=n$$

ゆえに　$a_n=\dfrac{1}{n}$　　これは $n=1$ のときも成り立つ．

したがって　$a_n=\dfrac{1}{n}$



$\boxed{5}$ ●[文207]y=x^2上の2点の内積tのとる範囲, t一定の和の軌跡[2002 数学ⅠⅡAB(文理)207]

O を原点とする座標平面上の曲線 $y=x^2$ 上の 2 点 A，B に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=t$ とおく．

(1)　t のとりうる値の範囲を求めよ．

(2)　$t=2$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる点 P の軌跡を求め，図示せよ．

(解説)

(1)　A$(a,\ a^2)$，B$(b,\ b^2)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=t$ から　$t=ab+a^2b^2=\left(ab+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$

ab は任意の実数値をとるから　$t\geqq -\dfrac{1}{4}$

(2)　$t=2$ であるから　$a^2b^2+ab-2=0$

ゆえに　$ab=1,\ -2$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から

$x=a+b$，$y=a^2+b^2$

[1]　$ab=1$ のとき

$x=a+\dfrac{1}{a}$，$y=a^2+\dfrac{1}{a^2}$

よって　$y=x^2-2$

ここで，$x=a+\dfrac{1}{a}$ から　$a^2-xa+1=0$

a は実数であるから　$x^2-4\geqq 0$

ゆえに　$x\leqq -2$，$2\leqq x$

[2]　$ab=-2$ のとき

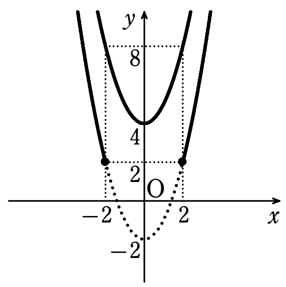
$x=a-\dfrac{2}{a}$，$y=a^2+\dfrac{4}{a^2}$

よって　$y=x^2+4$

ここで，$x=a-\dfrac{2}{a}$ から　$a^2-xa-2=0$

$D=x^2+8>0$ となるから，x は任意の実数値をとりうる．

以上から，点 P の軌跡は右図のようになる．



$\boxed{6}$ ●[3C11]楕円内の領域が円内の領域を含む条件[2002 数学ⅢC11]

a，b を正数とし，xy 平面で不等式

$$\frac{\{x-(1-a)\}^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqq 1$$

の表す領域 D と，不等式 $x^2+y^2\leqq 1$ の表す領域 E を考える．

(1)　$a=2$，$b=1$ の場合に，領域 D を図示せよ．

(2)　D が E に含まれるための a，b の条件を求め，ab 平面上でその条件の表す領域を図示せよ．

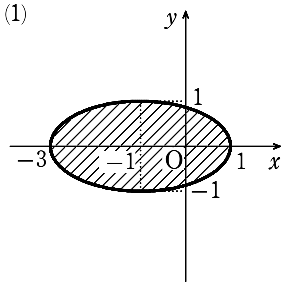
(解説)

(1)　$\dfrac{(x+1)^2}{4}+y^2\leqq 1$

よって，領域は図の斜線部分．

ただし，境界線上の点を含む．

(1)



(2)　求める条件は

$$\frac{\{x-(1-a)\}^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqq 1\ \cdots\cdots\ ①$$

を満たす任意の点 $(x,\ y)$ に対して

$$x^2+y^2-1\leqq 0\ \cdots\cdots\ ②$$

が成り立つことである．

① から　$y^2=b^2\left\{1-\dfrac{(x-1+a)^2}{a^2}\right\}$，

$-a\leqq x-1+a\leqq a$

$\dfrac{x-1+a}{a}=t$ とおくと　$x=at-a+1$，$-1\leqq t\leqq 1$

このとき，$y^2=b^2(1-t^2)$ であるから，② の左辺を $f(t)$ とおくと

$f(t)=(at-a+1)^2+b^2(1-t^2)-1$

$=a^2(t-1)^2+2a(t-1)+b^2(1-t^2)$

$=(t-1)\{(a^2-b^2)t-(a^2-2a+b^2)\}$

$-1\leqq t\leqq 1$ で $t-1\leqq 0$ であるから，$-1\leqq t\leqq 1$ において

$(a^2-b^2)t-(a^2-2a+b^2)\geqq 0$ が成り立てばよい．

ゆえに　$(a^2-b^2)-(a^2-2a+b^2)\geqq 0$

かつ $-(a^2-b^2)-(a^2-2a+b^2)\geqq 0$

よって　$b^2\leqq a$ かつ $0\leqq a\leqq 1$

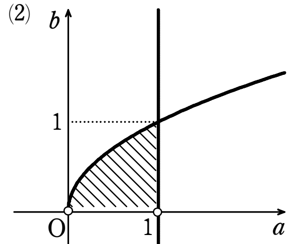
$a>0$，$b>0$ であるから

$0<a\leqq 1$，$b>0$，$b^2\leqq a$

よって，グラフは図の斜線部分．

ただし，境界線上の点のうち a 軸上の点を除く．

(2)



$\boxed{7}$ ○[3C114]2式の大小.2数の大小[2002 数学ⅢC 114]

(1)　x を正の数とするとき，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ と $\dfrac{1}{x+1}$ の大小を比較せよ.

(2)　$\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$ と $\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}$ の大小を比較せよ.

解説

(1)　$x>0$ のとき，$f(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}$ とおくと

$$f(x)=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x(x+1)-(x+1)^2+x}{x(x+1)^2}=-\frac{1}{x(x+1)^2}<0$$

ゆえに，$y=f(x)$ は単調に減少する.

また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ であるから，$x>0$ のとき　$f(x)>0$

よって　$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>\dfrac{1}{x+1}$

(2)　$x>0$ のとき，$y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ とおくと　$\log y=x\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

両辺を x で微分すると

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$$

ここで，(1) の結果および $y>0$ であることから，$\dfrac{dy}{dx}>0$ となる.

ゆえに，$x>0$ のとき，$y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ は単調に増加する.

よって　$\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}<\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$

$\boxed{8}$ ●0<a<1を満たすaについて，x(x^-a-1)<aの証明[2002]

a が $0<a<1$ を満たす定数のとき，任意の正の実数 x に対し，$x(x^{-a}-1)<a$ が成り立つことを証明せよ.

解説

$f(x)=a-x(x^{-a}-1)$ とおく．すなわち　$f(x)=a-x^{1-a}+x$

$f'(x)=-(1-a)x^{-a}+1$

$f'(x)=0$ とすると　$-(1-a)x^{-a}+1=0$

これを解くと　　　$x=(1-a)^{\frac{1}{a}}$

ゆえに，$x>0$ において，$f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	0	$\cdots$	$(1-a)^{\frac{1}{a}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗

よって，$x>0$ において，$f(x)$ は $x=(1-a)^{\frac{1}{a}}$ で極小かつ最小となる.

$$f\left((1-a)^{\frac{1}{a}}\right)=a-(1-a)^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{1-a}-1\right)=a\left\{1-(1-a)^{\frac{1}{a}-1}\right\}=a\left\{1-(1-a)^{\frac{1-a}{a}}\right\}$$

$0<a<1$ であるから　$0<1-a<1$，$\dfrac{1-a}{a}>0$

よって　$(1-a)^{\frac{1-a}{a}}<(1-a)^0=1$

ゆえに，$1-(1-a)^{\frac{1-a}{a}}>0$ であるから，$f\left((1-a)^{\frac{1}{a}}\right)>0$ が成り立つ.

すなわち，$f(x)>0$ が成り立つ.

したがって，$x(x^{-a}-1)<a$ が成り立つ.

$\boxed{9}$ ●[3C165]定積分の漸化式で表された数列. 単調減少の証明. 背理法[2002 数学ⅢＣ165]

$f(x)$ を実数全体で定義された連続関数で，$x>0$ で $0<f(x)<1$ を満たすものとする.

$a_1=1$ とし，順に，

$$a_m=\int_0^{a_{m-1}} f(x)\,dx \quad (m=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$$

により数列 $\{a_m\}$ を定める.

(1)　$m\geqq 2$ に対し，$a_m>0$ であり，かつ $a_1>a_2>\cdots\cdots>a_{m-1}>a_m>\cdots\cdots$ となることを示せ.

(2)　$\dfrac{1}{2002}>a_m$ となる m が存在することを背理法を用いて示せ.

(解説)

(1)　(ア)　$a_m>0$ であることの証明

[1]　$a_2=\displaystyle\int_0^{a_1} f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx>\int_0^1 0dx=0$

よって　$a_2>0$

[2]　$m=k$ のとき $a_k>0$ と仮定する.

このとき，$x>0$ で　$f(x)>0$

また $a_k>0$ であるから　$a_{k+1}=\displaystyle\int_0^{a_k} f(x)dx>0$

すなわち，$m=k$ のとき成り立つと仮定すると，$m=k+1$ のときも成り立つ.

したがって，[1]，[2] から，$m\geqq 2$ のとき $a_m>0$ である.

(イ)　$a_1>a_2>\cdots\cdots>a_{m-1}>a_m>\cdots\cdots$ であることの証明

$a_1=1$ と (ア) から，すべての $m\geqq 2$ に対して　$a_{m-1}>0$

また　$0<f(x)<1$

よって，$m\geqq 2$ のとき　$a_m=\displaystyle\int_0^{a_{m-1}} f(x)dx<\int_0^{a_{m-1}} dx=a_{m-1}$

ゆえに　$a_1>a_2>\cdots\cdots>a_{m-1}>a_m>\cdots\cdots$

(2)　$\dfrac{1}{2002}>a_m$ となる m が存在しないと仮定すると，すべての m について

$a_m\geqq\dfrac{1}{2002}$

ここで，$p=\dfrac{1}{2003}$ とすると　$a_m>p$

特に　$a_1>p$

区間 $[p,\ a_1]$ における $f(x)$ の最大値を M とすると　$0<M<1$

$$a_m=\int_0^{a_{m-1}} f(x)dx=\int_0^{p} f(x)dx+\int_p^{a_{m-1}} f(x)dx$$

$$<\int_0^{p} dx+\int_p^{a_{m-1}} Mdx=p+M(a_{m-1}-p)$$

ゆえに　$0<a_m-p<M(a_{m-1}-p)$

よって　$0<a_m-p\leqq M^{m-1}(a_1-p)$

$\displaystyle\lim_{m\to\infty} M^{m-1}(a_1-p)=0$ より　$\displaystyle\lim_{m\to\infty}(a_m-p)=0$

すなわち　$\displaystyle\lim_{m\to\infty} a_m=p=\frac{1}{2003}<\frac{1}{2002}$

これは矛盾である.

したがって $\dfrac{1}{2002}>a_m$ となる m が存在する.

$\boxed{10}$ ●[3C269]行列の関係式で表される点列. 2点間の距離[2002 数学ⅢＣ269]

行列 $P=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ および列ベクトル $\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}a_2\\ b_2\end{pmatrix}=P^2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$，……，

$\begin{pmatrix}a_m\\ b_m\end{pmatrix}=P^m\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$，…… を考える.

(1)　点 $(1,\ 1)$ と点 $(a_1,\ b_1)$ の距離 d_1 を求めよ.

(2)　平面上の 2 点 $(x,\ y)$，$(z,\ w)$ 間の距離を s とする．2 点

$$\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y,\ \frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y\right),\ \left(\frac{2}{3}z-\frac{1}{2}w,\ \frac{1}{2}z+\frac{2}{3}w\right)$$

間の距離 t を s を用いて表せ.

(3)　点 $(a_{m-1},\ b_{m-1})$ と点 $(a_m,\ b_m)$ の距離 d_m $(m=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$ を求めよ.

(解説)

(1)　$\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}4 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\ \frac{7}{6}\end{pmatrix}$ から

$$d_1=\sqrt{\left(1-\frac{1}{6}\right)^2+\left(1-\frac{7}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{26}}{6}$$

(2)　$s=\sqrt{(z-x)^2+(w-y)^2}$ であるから

$$t^2=\left(\frac{2}{3}z-\frac{1}{2}w-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y\right)^2+\left(\frac{1}{2}z+\frac{2}{3}w-\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y\right)^2$$

$$=\left\{\frac{2}{3}(z-x)-\frac{1}{2}(w-y)\right\}^2+\left\{\frac{2}{3}(w-y)+\frac{1}{2}(z-x)\right\}^2$$

$$=\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{4}\right)\{(z-x)^2+(w-y)^2\}=\frac{25}{36}s^2$$

ゆえに　$t=\dfrac{5}{6}s$

(3)　(2) では，$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}z\\ w\end{pmatrix}$ 間の距離と $P\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$，$P\begin{pmatrix}z\\ w\end{pmatrix}$ 間の距離との関係を求めていることになる.

ゆえに　$d_{m+1}=\dfrac{5}{6}d_m$

$d_1=\dfrac{\sqrt{26}}{6}$ であるから　$d_m=\dfrac{\sqrt{26}}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{m-1}$

$\boxed{11}$ ○等式を満たす複素数. 方程式の解について偏角［2002］

次の問いに答えよ．ただし，偏角 θ は，$0° \leqq \theta < 360°$ の範囲で考えるものとする．

(1)　$|z+i|=|z-i|$ を満たす複素数 z は，実数に限ることを示せ．

(2)　複素数平面上で z が実軸上を動くとき，複素数 $z+i$ の偏角 $\arg(z+i)$ の動く範囲を求めよ．

(3)　z を未知数とする方程式 $(z+i)^9=(z-i)^9$ のすべての解 z について $z+i$ の偏角 $\arg(z+i)$ を求めよ．

解説

(1)　$|z+i|=|z-i|$ を満たす点 z は，2 点 $-i$，i を結ぶ線分の垂直二等分線上すなわち実軸上にあるから，z は実数である．

(2)　z が実軸上を動くとき，$z+i$ は点 i を通り実軸に平行な直線上を動く．

したがって　$0° < \arg(z+i) < 180°$

(3)　$(z+i)^9=(z-i)^9$ から　$|z+i|^9=|z-i|^9$

ゆえに　$|z+i|=|z-i|$

よって，(1) から z は実数である．

したがって，(2) から　$\arg(z+i)=\theta$ とおくと　$0° < \theta < 180°$ …… ①

また，z は実数であるから　$z-i=\overline{z+i}$

よって，$\arg(z+i)^9=\arg(z-i)^9$ から　$9\theta=-9\theta+360° \times n$（$n$ は整数）

ゆえに　$\theta=20° \times n$ …… ②

①，② から　$\arg(z+i)=\theta=20°,\ 40°,\ 60°,\ 80°,\ 100°,\ 120°,\ 140°,\ 160°$