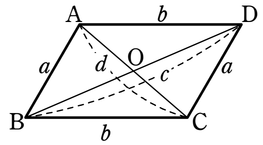
1 ●[理87]各面が合同な鋭角三角形である四面体の存在証明[2003 数学ⅠⅡAB(理)87]

(1) 平行四辺形 ABCD において，$AB=CD=a$，$BC=AD=b$，$BD=c$，$AC=d$ とする．このとき，$a^2+b^2=\frac{1}{2}(c^2+d^2)$ が成り立つことを証明せよ．

(2) 3 つの正の数 a，b，c $(0<a\leqq b\leqq c)$ が $a^2+b^2>c^2$ を満たすとき，各面の三角形の辺の長さを a，b，c とする四面体が作れることを証明せよ．

解説

(1) 対角線の交点を O とする．



$\triangle ABD$ において，中線定理から

$AB^2+AD^2=2(AO^2+BO^2)$

ゆえに　$a^2+b^2=2\left\{\left(\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2\right\}$

よって　$a^2+b^2=\frac{1}{2}(c^2+d^2)$

(2) 条件から，$AB=CD=a$，$BC=AD=b$，$AC=c$，$BD=d$ である平行四辺形 ABCD を考えることができる．対角線の交点を O とする．

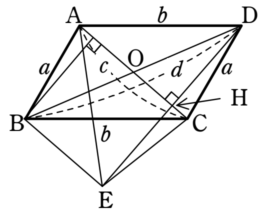
条件 $a^2+b^2>c^2$ …… ① と (1) から　$\frac{1}{2}(c^2+d^2)>c^2$

ゆえに　$d>c$ …… ②

また，条件から　$0<a\leqq b\leqq c$ …… ③

ここで，直線 AC を回転軸として，点 D を回転することを考える．

180° 回転した点を E とする．



①，③ から，$\triangle ABC$ は鋭角三角形．

よって，$\triangle ACD$ も鋭角三角形．

ゆえに，点 D から辺 AC に垂線 DH を引くと

$0\leqq OH<\frac{1}{2}AC$ …… ④

ここで，$AC /\!/ BE$ であるから　$2OH=BE$

これと，④ から　$BE<AC$

すなわち　$BE<c$ …… ⑤

ゆえに，点 D を回転するときの 2 点 B，D の距離を l とすると，l は d から BE まで連続的に変化する．

よって，②，⑤ から，l が値 c をとるような点 D の位置が存在する．

$l=c$ を満たすときの点 D の位置を点 F とすると，四面体 FABC は，すべての面の三角形の辺の長さが a，b，c である．

2 ○[理249]1〜10が4枚ずつからk枚, 3枚が同じ確率が最大のk[2003 数学ⅠⅡAB(理)249]

1 つの箱の中に 1 から 10 までの数が書かれたカードが 4 枚ずつ計 40 枚入っている．この箱から k 枚 $(3\leqq k\leqq 12)$ のカードを同時に取り出す．このうちの 3 枚のカードが同じ数で残りはこれとは違う互いに異なる数となる確率を $p(k)$ とする．

(1) $p(k)$ を求めよ．

(2) $4\leqq k\leqq 12$ のとき，$f(k)=\dfrac{p(k-1)}{p(k)}$ を求めよ．

(3) $p(k)$ を最大にする k の値を求めよ．

解説

(1) $p(k)=\dfrac{{}_{10}C_1\times{}_4C_3\times{}_9C_{k-3}\times 4^{k-3}}{{}_{40}C_k}=\dfrac{40\times 9!\times 4^{k-3}\times k!(40-k)!}{(k-3)!(12-k)!\times 40!}$

$=\dfrac{9!\times 4^{k-3}\times k(k-1)(k-2)\times(40-k)!}{39!(12-k)!}$

(2) $f(k)=\dfrac{p(k-1)}{p(k)}$

$=\dfrac{4^{k-4}\times(k-1)(k-2)(k-3)\times(41-k)!}{(13-k)!}\times\dfrac{(12-k)!}{4^{k-3}\times k(k-1)(k-2)\times(40-k)!}$

$=\dfrac{(k-3)(41-k)}{4k(13-k)}$

(3) $f(k)-1=\dfrac{(k-3)(41-k)-4k(13-k)}{4k(13-k)}=\dfrac{3k^2-8k-123}{4k(13-k)}=\dfrac{k(3k-8)-123}{4k(13-k)}$

$4\leqq k\leqq 12$ であるから　$4k(13-k)>0$

よって　$4\leqq k\leqq 7$ のとき　$f(k)<1$　すなわち　$p(k-1)<p(k)$

$8\leqq k\leqq 12$ のとき　$f(k)>1$　すなわち　$p(k-1)>p(k)$

ゆえに　$p(3)<p(4)<p(5)<p(6)<p(7)>p(8)>p(9)>p(10)>p(11)>p(12)$

よって，$k=7$ のとき最大となる．

$\boxed{3}$ ◎[3C29]確率で表された数列. 商の最小. 極限[2003　数学ⅢＣ29]

サイコロを n 回投げて，3 の倍数が k 回出る確率を $P_n(k)$ とする．各 n について，$P_n(k)$ を最大にする k を $N(n)$ とする．ただし，このような k が複数あるときは，最も大きいものを $N(n)$ とする．

(1) $\dfrac{P_n(k+1)}{P_n(k)}$ を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，$\dfrac{N(n)}{n}$ を最小にする n と，そのときの $\dfrac{N(n)}{n}$ の値を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n}$ を求めよ．

解説

(1) $P_n(k) = {}_n\mathrm{C}_k\left(\dfrac{1}{3}\right)^k\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \times \dfrac{2^{n-k}}{3^n}$

であるから

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{k!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)!} \times \frac{2^{n-k-1}}{2^{n-k}}$$

$$= \frac{n-k}{2(k+1)} \quad (k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$$

(2)，(3) $\dfrac{P_n(k+1)}{P_n(k)} - 1 = \dfrac{n-k-2(k+1)}{2(k+1)}$

$$= \frac{n-2-3k}{2(k+1)}$$

ゆえに　$k < \dfrac{n-2}{3}$ のとき　$P_n(k+1) > P_n(k)$

$k = \dfrac{n-2}{3}$ のとき　$P_n(k+1) = P_n(k)$

$k > \dfrac{n-2}{3}$ のとき　$P_n(k+1) < P_n(k)$

よって，l を自然数として

[1]　$n=3l-1$ のとき　$\dfrac{n-2}{3} = l-1$ であるから

$P_n(0) < P_n(1) < \cdots\cdots < P_n(l-2) < P_n(l-1)$
$= P_n(l) > P_n(l+1) > \cdots\cdots > P_n(n)$

ゆえに　$N(n) = l = \dfrac{n+1}{3}$

よって　$\dfrac{N(n)}{n} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3n} > \dfrac{1}{3}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n} = \frac{1}{3}$

[2]　$n=3l$ のとき　$\dfrac{n-2}{3} = l - \dfrac{2}{3}$ であるから

$P_n(0) < P_n(1) < \cdots\cdots < P_n(l-1) < P_n(l)$
$> P_n(l+1) > \cdots\cdots > P_n(n)$

ゆえに　$N(n) = l = \dfrac{n}{3}$

よって　$\dfrac{N(n)}{n} = \dfrac{1}{3}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n} = \frac{1}{3}$

[3]　$n=3l+1$ のとき　$\dfrac{n-2}{3} = l - \dfrac{1}{3}$ であるから

$P_n(0) < P_n(1) < \cdots\cdots < P_n(l-1) < P_n(l)$
$> P_n(l+1) > \cdots\cdots > P_n(n)$

ゆえに　$N(n) = l = \dfrac{n-1}{3}$

よって　$\dfrac{N(n)}{n} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3n} < \dfrac{1}{3}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n} = \frac{1}{3}$

[1]，[2]，[3] から，$n \geqq 2$ のとき $\dfrac{N(n)}{n}$ を最小にする n の値は，[3] で n が最小のときであるから　$n=4$

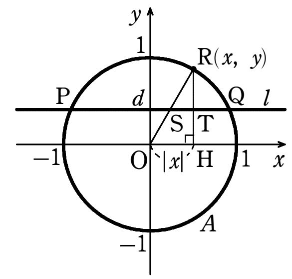
このとき　$\dfrac{N(n)}{n} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{4}$

また，[1]，[2]，[3] から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n} = \frac{1}{3}$

$\boxed{4}$ ○[3C83]円上と直線上の2点を結ぶ線分の長さの最大値[2003　数学ⅢＣ83]

O を原点とする座標平面上の，半径 1 の円周 A : $x^2+y^2=1$ と直線 l : $y=d$ $(0<d<1)$ との交点を P，Q とする．円周 A 上の点 R$(x,\ y)$ は $y>d$ の範囲を動く．線分 OR と線分 PQ の交点を S，点 R から線分 PQ へ下ろした垂線の足を T とするとき，線分 ST の長さの最大値を d を用いて表せ．

解説



R$(x,\ y)$ の y 座標について　　$(0<)\ d < y \leqq 1$

点 R から x 軸に下ろした垂線を RH とする．

このとき　　ST : OH = RT : RH

よって　　$\mathrm{ST} = \dfrac{\mathrm{OH}\cdot\mathrm{RT}}{\mathrm{RH}} = \dfrac{|x|(y-d)}{y}$

$$= \sqrt{1-y^2}\left(1-\frac{d}{y}\right)$$

ST $= f(y)$ とすると

$$f(y) = \sqrt{1-y^2}\left(1-\frac{d}{y}\right) \quad (d<y\leqq 1)$$

$$f'(y) = \frac{-2y}{2\sqrt{1-y^2}}\left(1-\frac{d}{y}\right) + \sqrt{1-y^2}\cdot\frac{d}{y^2}$$

$$= \frac{y^2(d-y)+d(1-y^2)}{y^2\sqrt{1-y^2}} = \frac{d-y^3}{y^2\sqrt{1-y^2}}$$

$f'(y)=0$ とすると　$d-y^3=0$　　　ゆえに　$y=\sqrt[3]{d}$

$0<d<1$ から $d<\sqrt[3]{d}<1$ であり，$f(y)$ の増減表は右のようになる．

y	d	$\cdots$	$\sqrt[3]{d}$	$\cdots$	1
$f'(y)$		+	0	−	
$f(y)$		↗	極大	↘	

よって，$y=\sqrt[3]{d}$ のとき $f(y)$ すなわち ST は最大で，その最大値は

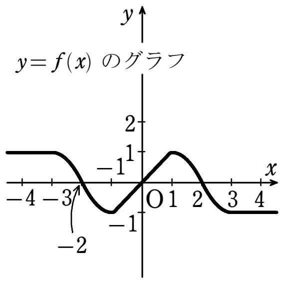
$$f(\sqrt[3]{d}) = \sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}\left(1-\frac{d}{\sqrt[3]{d}}\right) = \left(1-d^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-d^{\frac{2}{3}}\right) = \left(1-d^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

5 ●[3C135]関数のグラフから新たな関数のグラフの推察[2003　数学ⅢＣ135]

各点で微分可能な関数 $y=f(x)$ のグラフが右の図で与えられている．

このとき，$y=f'(x)$ と $y=\int_0^x f(t)\,dt$ のグラフの概形を描け．

また，そのようなグラフを描いたポイントを列挙して説明せよ．



解説

[1]　$y=f'(x)$ のグラフを描いたポイントとその説明．

①　$f'(x)$ は，$y=f(x)$ のグラフの接線の傾きである．

②　$f(-x)=-f(x)$ から　$-f'(-x)=-f'(x)$

ゆえに　$f'(-x)=f'(x)$

よって，$f'(x)$ は偶関数である．

したがって，$y=f'(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である．

③　$x\geqq 0$ で調べると，

$x=0$ から $x=1$ の近くまでは $f'(x)=1$,

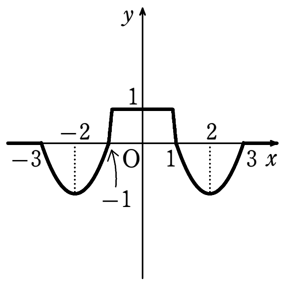
その後 $x=2$ までは単調に減少，

$x=2$ のとき極小で $f'(2)<-1$,

$2\leqq x\leqq 3$ のとき単調に増加，

$3\leqq x$ のとき $f'(x)=0$

よって，グラフは右図のようになる．



[2]　$y=\int_0^x f(t)\,dt$ のグラフを描いたポイントとその説明．

①　$0\leqq x\leqq 2$ のときは $\int_0^x f(t)\,dt$ は $y=f(x)$ のグラフと x 軸とで囲まれた図形の $0\leqq t\leqq x$ における面積を表すから，単調に増加する．

②　$x>2$ のとき

$\int_0^2 f(t)\,dt-\{y=f(x)$ のグラフと x 軸とで囲まれた図形の $2\leqq t\leqq x$ における面積$\}$

であるから，単調に減少する．

③　$x=2$ のとき極大で $\int_0^2 f(t)\,dt>1$

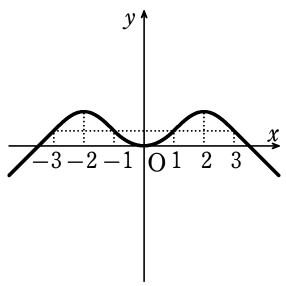
④　$x<0$ のとき

$$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^{-x} f(-u)(-1)\,du$$

$$=\int_0^{-x} f(u)\,du$$

であるから，$y=\int_0^x f(t)\,dt$ のグラフは y 軸に関して対称である．

よって，グラフは右図のようになる．



6 ●[3C268]座標平面上の点列．座標．点列の列挙[2003　数学ⅢＣ268]

a を 0 でない実数とする．

座標平面上の点列 $\{\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)\}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を次のように定める．

$(x_0,\ y_0)=(0,\ 0)$, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2a^2 & a \\ 2a^3 & -3a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(1)　P_n $(n\geqq 1)$ の座標を求めよ．

(2)　$\mathrm{P}_n=\mathrm{P}_1$ となる $n\geqq 2$ が存在するための a の条件を求めよ．そのときの点列をすべて求めよ．

解説

(1)　$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2a^2 & a \\ 2a^3 & -3a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a^2+1 \\ -a^3+a \end{pmatrix}=(1-a^2)\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}=(1-a^2)\begin{pmatrix} -2a^2 & a \\ 2a^3 & -3a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}=(1-a^2)\left\{(1-a^2)\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}\right\}+\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$$

$$=(1-a^2+a^4)\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$$ から，

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=\{1-a^2+a^4-\ \cdots\cdots\ +(-a^2)^{n-1}\}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}=\frac{1-(-a^2)^n}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$$ と類推される．

このことを，数学的帰納法で証明する．

[1]　$n=1$ のとき　左辺$=\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$, 右辺$=\dfrac{1+a^2}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$

ゆえに，成り立つ．

[2]　$n=k$ のとき

$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}=\dfrac{1-(-a^2)^k}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ が成り立つと仮定する．

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix}=\frac{1-(-a^2)^k}{1+a^2}\begin{pmatrix} -2a^2 & a \\ 2a^3 & -3a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}=\frac{1-(-a^2)^k}{1+a^2}\begin{pmatrix} -a^2 \\ -a^3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$$

$$=\frac{-a^2-(-a^2)^{k+1}}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}=\frac{1-(-a^2)^{k+1}}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$$

ゆえに，$n=k+1$ のときも成り立つ．

[1]，[2] から　$\mathrm{P}_n\left(\dfrac{1-(-a^2)^n}{1+a^2},\ \dfrac{a\{1-(-a^2)^n\}}{1+a^2}\right)$

(2)　$\dfrac{1-(-a^2)^n}{1+a^2}=1$　かつ　$\dfrac{a\{1-(-a^2)^n\}}{1+a^2}=a$

$a\fallingdotseq 0$ から　$(-a^2)^n=-a^2\ \cdots\cdots$ ①

$a\fallingdotseq 0$，かつ，① を満たす 2 以上の自然数 n が存在するから　$-a^2=-1$

ゆえに　$a=\pm 1$

次に，$a=1$ の場合，n が奇数のとき $\mathrm{P}_n(1,\ 1)$，n が偶数のとき $\mathrm{P}_n(0,\ 0)$；

$a=-1$ の場合，n が奇数のとき $\mathrm{P}_n(1,\ -1)$，n が偶数のとき $\mathrm{P}_n(0,\ 0)$

$\boxed{7}$ ●[3C272]2次方程式の実数解と漸化式. 点列の座標. 収束条件[2003　数学ⅢC272]

2 次方程式 $x^2-px-q=0$ は実数解 α, β をもつものとする.

座標平面上の点列 $\{P_n(a_n, b_n)\}$ $(n=0, 1, 2, \cdots\cdots)$ を次のように定める.

$$(a_0, b_0)=(0, 0), \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q & p \\ pq & p^2+q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

(1)　P_2, P_3 の座標を α のみを用いて表せ.

(2)　P_n の座標を α のみを用いて表せ.

(3)　$n \longrightarrow \infty$ のとき, $P_n(a_n, b_n)$ がある点 $P(a, b)$ に収束するための必要十分条件を α に関する条件として与え, その点 $P(a, b)$ を求めよ.

解説

(1)　$x^2-px-q=0$ の解が α, β であるから, 解と係数の関係により

$\alpha+\beta=p$, $\alpha\beta=-q$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q & p \\ pq & p^2+q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} q & p \\ pq & p^2+q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\alpha\beta & \alpha+\beta \\ -\alpha\beta(\alpha+\beta) & \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\alpha\beta & \alpha+\beta \\ -\alpha\beta(\alpha+\beta) & \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^2+1 \\ \alpha^3+\alpha \end{pmatrix}=(\alpha^2+1)\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\alpha\beta & \alpha+\beta \\ -\alpha\beta(\alpha+\beta) & \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha^2+1 \\ \alpha^3+\alpha \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$=(\alpha^2+1)\left\{\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}\right\}+\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$=(\alpha^2+1)\begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^4+\alpha^2+1 \\ \alpha^5+\alpha^3+\alpha \end{pmatrix}$$

$$=(\alpha^4+\alpha^2+1)\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

よって　$P_2(\alpha^2+1, \alpha^3+\alpha)$, $P_3(\alpha^4+\alpha^2+1, \alpha^5+\alpha^3+\alpha)$

(2)　問題文から　$P_0(0, 0)$

次に, (1) から, n が自然数のとき,

$$\overrightarrow{OP_n}=\{1+\alpha^2+\cdots\cdots+\alpha^{2(n-1)}\}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \cdots\cdots ①$$

と類推される.

これが正しいことを, 数学的帰納法で証明する.

[1]　$n=1$ のとき

左辺$=\overrightarrow{OP_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$, 右辺$=1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$

ゆえに, $n=1$ のとき, ① が成り立つ.

[2]　$n=k$ のとき

$$\overrightarrow{OP_k}=\{1+\alpha^2+\cdots\cdots+\alpha^{2(k-1)}\}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

が成り立つと仮定する.

$$\overrightarrow{OP_{k+1}}=\{1+\alpha^2+\cdots\cdots+\alpha^{2(k-1)}\}\begin{pmatrix} -\alpha\beta & \alpha+\beta \\ -\alpha\beta(\alpha+\beta) & \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$=\{1+\alpha^2+\cdots\cdots+\alpha^{2(k-1)}\}\left\{\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}\right\}+\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$=\{1+\alpha^2+\cdots\cdots+\alpha^{2(k-1)}\}\begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$=\alpha^2\{1+\alpha^2+\cdots\cdots+\alpha^{2(k-1)}\}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$=(1+\alpha^2+\alpha^4+\cdots\cdots+\alpha^{2k})\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

ゆえに, $n=k+1$ のときも, ① が成り立つ.

[1], [2] から, n が自然数のとき, ① が成り立つ.

以上から　$P_0(0, 0)$, n が自然数のとき

$P_n(1+\alpha^2+\cdots\cdots+\alpha^{2(n-1)}, \alpha+\alpha^3+\cdots\cdots+\alpha^{2n-1})$

(3)　$\alpha^2=1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} n=\infty$ となり, 不適.

$\alpha^2>1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ となり, 不適.

$0\leqq\alpha^2<1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{1-\alpha^2}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n=\frac{\alpha}{1-\alpha^2}$ となり, 適する.

ゆえに, 収束するための条件は　$-1<\alpha<1$

このとき　$P\left(\dfrac{1}{1-\alpha^2}, \dfrac{\alpha}{1-\alpha^2}\right)$

$\boxed{8}$ ○最大公約数が1になる自然数の個数[2003]

n を自然数とするとき, $m\leqq n$ で m と n の最大公約数が 1 となる自然数 m の個数を $f(n)$ とする.

(1)　$f(15)$ を求めよ.

(2)　p, q を互いに異なる素数とする. このとき, $f(pq)$ を求めよ.

解説

(1)　15 以下で, かつ 15 と互いに素である自然数は 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14

よって　$f(15)=8$

(2)　1 から pq までの pq 個の自然数のうち, p, $2p$, ……, $(q-1)p$; q, $2q$, ……, $(p-1)q$ と pq を除いたものの個数であるから

$f(pq)=pq-(q-1)-(p-1)-1=(p-1)(q-1)$

9 ●放物線と法線で囲まれる面積の最小[2003]

放物線 C : $y=ax^2$ $(a>0)$ を考える．放物線 C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ ap^2)$ $(p\fallingdotseq 0)$ における C の接線と直交し，P を通る直線を l とする．直線 l と放物線 C とで囲まれる図形の面積を $S(\mathrm{P})$ とする．

(1)　直線 l の方程式を求めよ．

(2)　点 P を $p>0$ の範囲で動かす．$S(\mathrm{P})$ が最小となるときの，直線 l の傾き m と $S(\mathrm{P})$ を求めよ．

解説

(1)　$y=ax^2$ から　$y'=2ax$

$ap\fallingdotseq 0$ であるから

l : $y=-\dfrac{1}{2ap}(x-p)+ap^2$　すなわち　$y=-\dfrac{1}{2ap}x+ap^2+\dfrac{1}{2a}$

(2)　放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=-\dfrac{1}{2ap}(x-p)+ap^2$ の交点の x 座標を求める．

$ax^2-ap^2=-\dfrac{1}{2ap}(x-p)$

よって　$(x-p)\left\{a(x+p)+\dfrac{1}{2ap}\right\}=0$

$x\fallingdotseq p$ とすると　$a(x+p)=-\dfrac{1}{2ap}$

$a\fallingdotseq 0$ であるから　$x=-p-\dfrac{1}{2a^2p}$

$a>0$，$p>0$ であるから $-p-\dfrac{1}{2a^2p}<0$ である．したがって

$$S(\mathrm{P})=-\int_{-p-\frac{1}{2a^2p}}^{p} a(x-p)\left(x+p+\frac{1}{2a^2p}\right)dx$$

$$=\frac{a}{6}\left(p+p+\frac{1}{2a^2p}\right)^3$$

$$=\frac{a}{6}\left(2p+\frac{1}{2a^2p}\right)^3\geqq\frac{a}{6}\left(2\sqrt{2p\cdot\frac{1}{2a^2p}}\right)^3=\frac{4}{3a^2}$$

$2p=\dfrac{1}{2a^2p}$，$a>0$，$p>0$　すなわち　$p=\dfrac{1}{2a}$ のとき等号が成り立つ．

よって，最小値は　$\dfrac{4}{3a^2}$　　このとき　$m=-\dfrac{1}{2ap}=-1$

10 ○三角形の内分点．線分の長さ[2003]

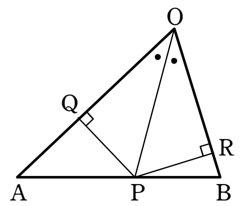
△OAB の頂角 ∠O の 2 等分線と辺 AB との交点を P，点 P から直線 OA へ下ろした垂線の足を Q とする．以下では，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする．

(1)　P は線分 AB を $|\vec{a}|:|\vec{b}|$ に内分する点であることを証明せよ．

(2)　線分の長さ OQ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

解説

(1)　点 P から辺 OB へ下ろした垂線の足を R とする．



2 つの直角三角形 OPQ と OPR において

∠AOP＝∠BOP，OP は共通

ゆえに　△OPQ≡△OPR　　よって　PQ＝PR

ゆえに　$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}=\dfrac{\triangle\mathrm{OAP}}{\triangle\mathrm{OBP}}=\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}=\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$

よって，題意は成り立つ．

(2)　$\mathrm{OQ}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\angle\mathrm{AOP}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}$

$$=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{a}\cdot\dfrac{|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}}{|\vec{a}|}=\frac{|\vec{a}|^2|\vec{b}|+|\vec{a}|\vec{a}\cdot\vec{b}}{(|\vec{a}|+|\vec{b}|)|\vec{a}|}=\frac{|\vec{a}||\vec{b}|+\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$$