1 ●[理36]3元1次方程式, 2次方程式のただ1つの共通解の関係式[2004 数学ⅠⅡＡＢ(理) 36]

a, b, c を実数とし，実数の組 $(x,\ y,\ z)$ に関する方程式(A), (B)を考える．

(A) $\begin{cases} x+y-2z=3a \\ 2x-y-z=3b \\ x-5y+4z=3c \end{cases}$　　(B) $x^2+y^2+z^2=1$

(1) 方程式(A)が解をもつための a, b, c に対する条件を求めよ．また，そのときの方程式(A)の解 $(x,\ y,\ z)$ を求めよ．

(2) 方程式(A)と(B)がただ1つの共通解をもつとき，その共通解 $(x,\ y,\ z)$ は方程式 $2x^2+2xy+2y^2=1$ を満たすことを示せ．

解説

(1) (A) $\begin{cases} x+y-2z=3a & \cdots\cdots ① \\ 2x-y-z=3b & \cdots\cdots ② \\ x-5y+4z=3c & \cdots\cdots ③ \end{cases}$

①×2−② から　$3y-3z=6a-3b$

ゆえに　$y-z=2a-b$

①−③ から　$6y-6z=3a-3c$

ゆえに　$y-z=\dfrac{1}{2}(a-c)$

よって，(A)が解をもつための条件は　$2a-b=\dfrac{1}{2}(a-c)$

すなわち　$3a-2b+c=0$

このとき，$z=t$ とおくと　$y=2a-b+t$

$x=3a-y+2t=a+b+t$

したがって，(A)の解は　$(x,\ y,\ z)=(a+b+t,\ 2a-b+t,\ t)$ (t は任意の実数)

(2) (1)の解が(B)を満たすとき　$(a+b+t)^2+(2a-b+t)^2+t^2=1$

整理すると　$3t^2+6at+5a^2-2ab+2b^2-1=0$ ……④

(A)と(B)がただ1つの共通解をもつとき，④は重解をもつ．④の判別式を D とすると　$D=0$

よって　$\dfrac{D}{4}=(3a)^2-3(5a^2-2ab+2b^2-1)=0$

ゆえに　$2a^2-2ab+2b^2=1$ ……⑤

このとき，④の重解は　$t=-a$

よって，(A), (B)の共通解は　$(x,\ y,\ z)=(b,\ a-b,\ -a)$

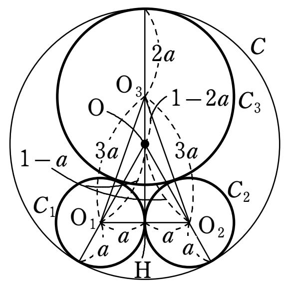
したがって

$2x^2+2xy+2y^2=2b^2+2b(a-b)+2(a-b)^2=2a^2-2ab+2b^2=1$ (⑤から)

2 ●[理88]半径1の円に内接し, 互いに外接する半径a, a, 2aの3円[2004 数学ⅠⅡＡＢ(理) 88]

C_1, C_2, C_3 は，半径がそれぞれ a, a, $2a$ の円とする．いま，半径1の円 C にこれらが内接していて，C_1, C_2, C_3 は互いに外接しているとき，a の値を求めよ．

解説



円 C, C_1, C_2, C_3 の中心をそれぞれ O, $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$, $\mathrm{O_3}$ とし，2円 C_1, C_2 の接点を H とする．

このとき　$\mathrm{OO_1}=1-a$, $\mathrm{O_1O_3}=a+2a=3a$

$\triangle \mathrm{OO_1H}$ において，三平方の定理から

$\mathrm{OH}=\sqrt{(1-a)^2-a^2}=\sqrt{1-2a}$

また　$\mathrm{OO_3}=1-2a$

$\triangle \mathrm{O_3O_1H}$ において，三平方の定理から

$\mathrm{O_3H}=\sqrt{(3a)^2-a^2}=2\sqrt{2}\,a$

$\mathrm{OH}+\mathrm{OO_3}=\mathrm{O_3H}$ であるから　$\sqrt{1-2a}+(1-2a)=2\sqrt{2}\,a$

ゆえに　$\sqrt{1-2a}=2(1+\sqrt{2})a-1$ ……①

① の左辺の根号内が0以上であることから　$0<a\leqq\dfrac{1}{2}$

① の右辺が0以上であることから　$a\geqq\dfrac{1}{2(1+\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

よって　$\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$ ……②

① の両辺を平方し，整理すると　$2(3+2\sqrt{2})a^2=(1+2\sqrt{2})a$

$a>0$ であるから　$2(3+2\sqrt{2})a=1+2\sqrt{2}$

よって　$a=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2(3+2\sqrt{2})}=\dfrac{(1+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}{2(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=\dfrac{4\sqrt{2}-5}{2}$

これは ② を満たす．

3 ●[理143]漸化式で定義された数列の隣接2項が互いに素の証明[2004 数学ⅠⅡＡＢ(理) 143]

正の整数 a と b が互いに素であるとき，正の整数からなる数列 $\{x_n\}$ を $x_1=x_2=1$, $x_{n+1}=ax_n+bx_{n-1}$ $(n\geqq2)$ で定める．このときすべての正の整数 n に対して x_{n+1} と x_n が互いに素であることを示せ．

解説

まず，命題「x_n と b が互いに素である」 ……①

がすべての正の整数 n に対して成り立つことを示す．

[1] $n=1$, 2 のとき $x_1=x_2=1$ であるから，① は成り立つ．

[2] $n=k$ $(k\geqq2)$ のとき，① が成り立つと仮定する．

x_{k+1} と b の最大公約数を g_1 とすると，$ax_k=x_{k+1}-bx_{k-1}$ であるから ax_k は g_1 で割り切れる．

また，a と b, x_k と b は互いに素であるから，ax_k と b は互いに素である．

よって　$g_1=1$

[1], [2] から① はすべての正の整数 n に対して成り立つ．

次に，命題「x_{n+1} と x_n が互いに素である」 ……②

がすべての正の整数 n に対して成り立つことを示す．

[3] $n=1$ のとき $x_1=x_2=1$ であるから，② は成り立つ．

[4] $n=k$ のとき，② が成り立つと仮定する．

x_{k+2}, x_{k+1} の最大公約数を g_2 とすると，$bx_k=x_{k+2}-ax_{k+1}$ であるから，bx_k は g_2 で割り切れる．

また，x_{k+1} と x_k, x_{k+1} と b は互いに素であるから x_{k+1} と bx_k は互いに素である．

よって　$g_2=1$

したがって x_{k+1} と x_{k+2} は互いに素である．

[3], [4] から，すべての正の整数 n について x_{n+1} と x_n は互いに素である．

4 ○[文160]関数が極値をもつaの範囲,P,Qを通る直線の傾き[2004 数学ⅠⅡAB(文理)160]

a を実数とする．$f(x)=x^3+ax^2+(3a-6)x+5$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　関数 $y=f(x)$ が極値をもつ a の値の範囲を求めよ．

(2)　関数 $y=f(x)$ が極値をもつ a に対して，関数 $y=f(x)$ は $x=p$ で極大値，$x=q$ で極小値をとるとする．関数 $y=f(x)$ のグラフ上の 2 点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ を結ぶ直線の傾き m を a を用いて表せ．

解説

(1)　$f'(x)=3x^2+2ax+3a-6$

関数 $y=f(x)$ が極値をもつための必要十分条件は，$f'(x)=0$ すなわち

$3x^2+2ax+3a-6=0$ ……① が異なる 2 つの実数解をもつことである．

よって，① の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=a^2-3(3a-6)>0$

整理すると　$(a-3)(a-6)>0$

ゆえに　$a<3,\ 6<a$

(2)　$p,\ q$ は $f'(x)=0$ すなわち ① の 2 つの解である．

解と係数の関係により　$p+q=-\dfrac{2}{3}a,\ pq=a-2$

よって

$$\begin{aligned} m&=\frac{f(q)-f(p)}{q-p}=\frac{1}{q-p}\{(q^3-p^3)+a(q^2-p^2)+(3a-6)(q-p)\}\\ &=(q^2+qp+p^2)+a(q+p)+3a-6\\ &=\{(p+q)^2-pq\}+a(p+q)+3a-6\\ &=\left\{\left(-\frac{2}{3}a\right)^2-(a-2)\right\}+a\left(-\frac{2}{3}a\right)+3a-6\\ &=\frac{4}{9}a^2-a+2-\frac{2}{3}a^2+3a-6\\ &=-\frac{2}{9}a^2+2a-4 \end{aligned}$$

別解

$$\begin{aligned} m&=\frac{f(q)-f(p)}{q-p}=\frac{\int_p^q f'(x)\,dx}{q-p}=\frac{\int_p^q 3(x-p)(x-q)\,dx}{q-p}\\ &=\frac{1}{q-p}\times3\times\left\{-\frac{1}{6}(q-p)^3\right\}=-\frac{1}{2}(q-p)^2=-\frac{1}{2}\{(p+q)^2-4pq\}\\ &=-\frac{1}{2}\left\{\left(-\frac{2}{3}a\right)^2-4(a-2)\right\}=-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}a^2-4a+8\right)=-\frac{2}{9}a^2+2a-4 \end{aligned}$$

5 ◎[文229]漸化式で定義された複素数列が表す点の三角形の面積[2004 数学ⅠⅡAB(文理)229]

i を虚数単位とする．$z_1=3$ および，漸化式 $z_{n+1}=(1+i)z_n+i\ (n\geqq1)$ によって定まる複素数からなる数列 $\{z_n\}$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　z_n を求めよ．

(2)　すべての正の整数 m について，$z_{8m-7}=2^{4m-2}-1$ となることを示せ．

(3)　複素数 z_n が表す複素数平面の点を P_n とする．P_n，P_{n+1}，P_{n+2} を 3 頂点とする三角形の面積を求めよ．

解説

(1)　漸化式を変形すると　$z_{n+1}+1=(1+i)(z_n+1)$

また　$z_1+1=3+1=4$

よって，数列 $\{z_n+1\}$ は初項 4，公比 $1+i$ の等比数列である．

ゆえに　$z_n+1=4\cdot(1+i)^{n-1}$

よって　$z_n=4(1+i)^{n-1}-1$

(2)　$z_{8m-7}=4(1+i)^{8m-8}-1=4\{(1+i)^8\}^{m-1}-1$

ここで　$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$

$(1+i)^8=\{(1+i)^2\}^4=(2i)^4=2^4$

よって　$z_{8m-7}=4\cdot(2^4)^{m-1}-1=2^{4m-2}-1$

(3)　(1) から　$|z_{n+1}-z_n|=|4(1+i)^n-4(1+i)^{n-1}|=4|(1+i)^{n-1}|=4(\sqrt{2})^{n-1}$

よって　$|z_{n+2}-z_{n+1}|=4(\sqrt{2})^n$

ここで

$$\begin{aligned} \arg\frac{z_n-z_{n+1}}{z_{n+2}-z_{n+1}}&=\arg\frac{(1+i)^{n-1}-(1+i)^n}{(1+i)^{n+1}-(1+i)^n}=\arg\frac{1-(1+i)}{(1+i)^2-(1+i)}\\ &=\arg\frac{1-1-i}{2i-1-i}=\arg\frac{-i}{i-1}=\arg\frac{i}{1-i}=90^\circ+45^\circ=135^\circ \end{aligned}$$

したがって，求める面積は

$$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}=\frac{1}{2}\times4(\sqrt{2})^{n-1}\times4(\sqrt{2})^n\sin135^\circ=8\times2^n\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=2^{n+2}$$

6 ○[文253]さいころの出た目だけ数直線を移動する試行[2004 数学ⅠⅡAB(文理)253]

サイコロの出た目の数だけ数直線を正の方向に移動するゲームを考える．ただし，8 をゴールとしてちょうど 8 の位置へ移動したときにゲームを終了し，8 を超えた分についてはその数だけ戻る．たとえば，7 の位置で 3 が出た場合，8 から 2 戻って 6 へ移動する．なお，サイコロは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする．原点から始めて，サイコロを n 回投げ終えたときに 8 へ移動してゲームを終了する確率を p_n とおく．

(1)　p_2 を求めよ．

(2)　p_3 を求めよ．

(3)　p_4 を求めよ．

解説

(1)　1 回目の目が a，2 回目の目が b であることを $(a,\ b)$ で表す．2 回目でゲームが終了するのは，1 回目と 2 回目の目の和が 8 の場合であるから，(2，6)，(3，5)，(4，4)，(5，3)，(6，2) の 5 通り．

よって　$p_2=\dfrac{5}{6^2}=\dfrac{5}{36}$

(2)　3 回目でゲームが終了するのは，2 回目でゲームが終了しておらず，2，3，4，5，6，7 のいずれかの位置にいて，3 回目にそれぞれ 6，5，4，3，2，1 の目が出る場合である．

よって　$p_3=(1-p_2)\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{31}{36}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{31}{216}$

(3)　(2) と同様に考えて

$$p_4=(1-p_2-p_3)\times\frac{1}{6}=p_3-\frac{1}{6}p_3=\frac{5}{6}p_3=\frac{155}{1296}$$

7 ○[理251]さいころの出た目だけ数直線を移動する試行[2004 数学ⅠⅡAB(理)251]

サイコロの出た目の数だけ数直線を正の方向に移動するゲームを考える．ただし，8 をゴールとしてちょうど 8 の位置へ移動したときにゲームを終了し，8 を超えた分についてはその数だけ戻る．たとえば，7 の位置で 3 が出た場合，8 から 2 戻って 6 へ移動する．なお，サイコロは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする．原点から始めて，サイコロを n 回投げ終えたときに 8 へ移動してゲームを終了する確率を p_n とおく．

(1)　p_2 を求めよ．

(2)　p_3 を求めよ．

(3)　4 以上のすべての n に対して p_n を求めよ．

解説

(1)　1 回目の目が a，2 回目の目が b であることを $(a,\ b)$ で表す．2 回目でゲームが終了するのは，1 回目と 2 回目の目の和が 8 の場合であるから $(2,\ 6)$，$(3,\ 5)$，$(4,\ 4)$，$(5,\ 3)$，$(6,\ 2)$ の 5 通り．

よって　$p_2=\dfrac{5}{6^2}=\dfrac{5}{36}$

(2)　3 回目でゲームが終了するのは，2 回目で，ゲームが終了しておらず 2，3，4，5，6，7 のいずれかの位置にいて，3 回目にそれぞれ 6，5，4，3，2，1 の目が出る場合である．

よって　$p_3=(1-p_2)\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{31}{36}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{31}{216}$

(3)　n 回目 $(n\geqq 4)$ でゲームが終了するのは，次の 2 つの場合があり，これらは互いに排反である．

[1]　1 回目に 1 の目が出て，2 回目に 2 ～ 7 の位置に移動し，3 回目から $n-1$ 回目まで 3 ～ 7 の位置にあり，n 回目に 8 へ移動する．

[2]　1 回目に 1 以外の目が出て 2 ～ 6 の位置に移動し，2 回目から $n-1$ 回目まで 3 ～ 7 の位置にあり，n 回目に 8 へ移動する．

[1] の確率は　$\dfrac{1}{6}\times 1\times\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-3}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{6\times 5^{n-3}}{6^n}$

[2] の確率は　$\dfrac{5}{6}\times\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-2}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{5^{n-1}}{6^n}$

よって　$p_n=\dfrac{6\times 5^{n-3}}{6^n}+\dfrac{5^{n-1}}{6^n}=\dfrac{31}{125}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

別解　(2) と同様に考えると，$n\geqq 4$ のとき

$$p_n=(1-p_2-p_3-\cdots\cdots-p_{n-1})\times\frac{1}{6}\quad\cdots\cdots①$$

① において，n を $n-1$ でおき換えると

$$p_{n-1}=(1-p_2-p_3-\cdots\cdots-p_{n-2})\times\frac{1}{6}\quad\cdots\cdots②$$

①－② から　$p_n-p_{n-1}=-\dfrac{1}{6}p_{n-1}$

よって　$p_n=\dfrac{5}{6}p_{n-1}\ (n\geqq 4)$

したがって

$$p_n=\frac{5}{6}p_{n-1}=\left(\frac{5}{6}\right)^2p_{n-2}=\cdots\cdots=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}p_3=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}\times\frac{31}{216}=\frac{31}{125}\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

8 ○[3C68]2^a-2a/a-1と2^b-2b/b-1の大小を比較(0<a<b<1)[2004 数学ⅢC68]

実数 a，b が $0<a<b<1$ を満たすとき，$\dfrac{2^a-2a}{a-1}$ と $\dfrac{2^b-2b}{b-1}$ の大小を比較せよ．

解説

$f(x)=\dfrac{2^x-2x}{x-1}$ とおき，$0<x<1$ における $f(x)$ の増減を調べる．

$$f'(x)=\frac{(2^x\log 2-2)(x-1)-(2^x-2x)}{(x-1)^2}=\frac{\{(x-1)\log 2-1\}2^x+2}{(x-1)^2}$$

この分子を $g(x)=\{(x-1)\log 2-1\}2^x+2$ とおくと

$$g'(x)=(\log 2)2^x+\{(x-1)\log 2-1\}\cdot 2^x\log 2=(x-1)2^x(\log 2)^2$$

$0<x<1$ のとき $g'(x)<0$ であるから，$g(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ において，単調に減少する．

ゆえに，$0<x<1$ のとき　$g(1)<g(x)<g(0)$

すなわち　$0<g(x)<1-\log 2$

よって，$g(x)>0$ であるから　$f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^2}>0$

ゆえに，$f(x)$ は $0<x<1$ において単調に増加する．

よって，$0<a<b<1$ のとき　$f(a)<f(b)$

すなわち　$\dfrac{2^a-2a}{a-1}<\dfrac{2^b-2b}{b-1}$

9 ●[3C131]漸化式によって定義された関数の列の定積分など[2004 数学ⅢC131]

多項式の列 $f_n(x)$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ が，$f_0(x)=2$，$f_1(x)=x$，

$f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x)$，$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots$

を満たすとする．

(1)　$f_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ であることを示せ．

(2)　$n\geqq 2$ のとき，方程式 $f_n(x)=0$ の $|x|\leqq 2$ における最大の実数解を x_n とおく．このとき，$\displaystyle\int_{x_n}^2 f_n(x)dx$ の値を求めよ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\int_{x_n}^2 f_n(x)dx$ の値を求めよ．

解説

(1)　$f_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta$　$\cdots\cdots①$ を証明する．

[1]　$n=0$ のとき　$f_0(2\cos\theta)=2=2\cos 0$

$n=1$ のとき　$f_1(2\cos\theta)=2\cos\theta$

よって，① は成り立つ．

[2]　$n=k,\ k+1$ のとき ① が成り立つと仮定する．

すなわち　$f_k(2\cos\theta)=2\cos k\theta$

$f_{k+1}(2\cos\theta)=2\cos(k+1)\theta$ が成り立つ．

このとき　$f_{k+2}(2\cos\theta)=2\cos\theta f_{k+1}(2\cos\theta)-f_k(2\cos\theta)$

$=2\cos\theta\cdot 2\cos(k+1)\theta-2\cos k\theta$

$=2\{\cos(k+2)\theta+\cos k\theta\}-2\cos k\theta$

$=2\cos(k+2)\theta$

よって，$n=k+2$ のときにも ① は成り立つ．

[1]，[2] から，数学的帰納法により，① は 0 以上の整数 n について成り立つ．

(2)　$|x|\leqq 2$ であるから，$x=2\cos\theta$　$(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とおける．

$f_n(x)=0$ と (1) から　$2\cos n\theta=0$

$x=2\cos\theta$ は $0\leqq\theta\leqq\pi$ において単調に減少するから，x が最大になるのは θ が最小のときである．

$x=x_n$ のときの θ を θ_n とすると　$n\theta_n=\dfrac{\pi}{2}$

ゆえに　$\theta_n=\dfrac{\pi}{2n}$

また　$x=2\cos\theta$ から　$dx=-2\sin\theta\,d\theta$

よって

x	$x_n\longrightarrow 2$
θ	$\dfrac{\pi}{2n}\longrightarrow 0$

$$\int_{x_n}^2 f_n(x)dx=\int_{\frac{\pi}{2n}}^0 2\cos n\theta(-2\sin\theta)d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\{\sin(n+1)\theta-\sin(n-1)\theta\}d\theta$$

$$=2\left[\frac{1}{n-1}\cos(n-1)\theta-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2n}}$$

$$=2\left\{\frac{1}{n-1}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\right)-\frac{1}{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}\right)-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}\right\}$$

$$=2\left\{\frac{1}{n-1}\sin\frac{\pi}{2n}+\frac{1}{n+1}\sin\frac{\pi}{2n}-\frac{2}{(n+1)(n-1)}\right\}$$

$$=\frac{4}{(n+1)(n-1)}\left(n\sin\frac{\pi}{2n}-1\right)$$

(3)　(2) から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\int_{x_n}^2 f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\cdot\frac{\pi}{2}-1\right)$

$$=4\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=2(\pi-2)$$

$\boxed{10}$ ●［3C224］行列の満たす等式から行列の決定，n乗など［2004 数学ⅢＣ224］

E を2次の単位行列とする．整数 a，b，c，d を成分とする行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が

$A^2=-E$，$b+c=0$，$b\geqq 0$ という条件を満たすとする．また，$B=\sqrt{3}A-E$ とおく．

(1) 行列 A を求めよ．

(2) $B^n=2^nE$ を満たす正の整数 n で最小のものを求めよ．

(3) 正の整数 n に対して $B^n=p_nE+q_nA$ を満たす実数 p_n と q_n を求めよ．

解説

(1) $c=-b$ であるから　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & d \end{pmatrix}$

行列 A について，ハミルトン・ケーリーの定理により

$A^2-(a+d)A+(ad+b^2)E=O$ …… ① が成り立つ．

$A^2=-E$ を ① に代入して整理すると　$(a+d)A=(ad+b^2-1)E$ …… ②

［1］ $a+d=0$ のとき

② から　$(ad+b^2-1)E=O$

よって　$ad+b^2-1=0$

$d=-a$ であるから　$a(-a)+b^2-1=0$

ゆえに　$(b+a)(b-a)=1$

すなわち　$(a+b)(a-b)=-1$

$b\geqq 0$ であるから　$a+b\geqq a-b$

$a+b$，$a-b$ は整数であるから　$a+b=1$，　$a-b=-1$

よって　$a=0$，$b=1$

このとき　$c=-1$，$d=0$

［2］ $a+d\fallingdotseq 0$ のとき

$A\fallingdotseq O$ と ② から $A=kE$ (k は実数) とおける．

これを $A^2=-E$ に代入すると　$k^2E=-E$

よって　$k^2=-1$

これを満たす実数 k は存在しない．

以上から　$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $B=\sqrt{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\fallingdotseq 2E$

$B^2=(\sqrt{3}A-E)^2=3A^2-2\sqrt{3}A+E^2=-3E-2\sqrt{3}A+E=-2\sqrt{3}A-2E\fallingdotseq 2^2E$

$B^3=(\sqrt{3}A-E)(-2\sqrt{3}A-2E)=-2(\sqrt{3}A-E)(\sqrt{3}A+E)=-2(3A^2-E^2)$

$=-2(-3E-E)=8E=2^3E$

よって，求める正の整数 n は　$n=3$

(3) $B^3=8E$ であるから，m を自然数として

［1］ $n=3m$ のとき　$B^n=B^{3m}=2^{3m}E=2^nE$

よって　$p_n=2^n$，$q_n=0$

［2］ $n=3m-1$ のとき

$B^n=B^{3m-1}=B^{3(m-1)}\cdot B^2=2^{3(m-1)}E(-2\sqrt{3}A-2E)=-2^{3m-2}E-2^{3m-2}\sqrt{3}A$

$=-2^{n-1}E-2^{n-1}\sqrt{3}A$

よって　$p_n=-2^{n-1}$，$q_n=-2^{n-1}\sqrt{3}$

［3］ $n=3m-2$ のとき

$B^n=B^{3m-2}=B^{3(m-1)}B=2^{3(m-1)}E(\sqrt{3}A-E)=-2^{3m-3}E+2^{3m-3}\sqrt{3}A$

$=-2^{n-1}E+2^{n-1}\sqrt{3}A$

よって　$p_n=-2^{n-1}$，$q_n=2^{n-1}\sqrt{3}$