1 ●[理99]規則に従って確率的に変化する変数xの値[2005 数学ⅠⅡＡＢ(理)99]

整数の値をとる変数 x の値が，以下の規則で変化する。

(i)　ある時刻で $x=m$ $(m\neq 0)$ のとき，1 秒後に $x=m+1$，$x=m-1$ である確率はともに $\frac{1}{2}$ である。

(ii)　ある時刻で $x=0$ のとき，1 秒後に $x=1$ である確率は q，$x=-1$ である確率は $1-q$ である $(0\leqq q\leqq 1)$。

$x=0$ から始めて，n 秒後 $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ に $x=m$ である確率を $p_n(m)$ とする。

(1)　$p_3(1)+p_3(-1)$ を求めよ。

(2)　すべての自然数 n に対し次が成り立つことを示せ：どんな整数 m についても $p_n(m)+p_n(-m)$ は q にはよらない。

(3)　$p_n(0)$ を求めよ。

解説

(1)　3 秒後の x の値は $-3,\ -1,\ 1,\ 3$ のいずれかであるから

$$p_3(1)+p_3(-1)=1-\{p_3(3)+p_3(-3)\}=1-\left\{q\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+(1-q)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right\}=\frac{3}{4}$$

(2)　示すべき事柄

「どんな整数 m についても $p_n(m)+p_n(-m)$ は q によらない」を ① とする。

[1]　$n=1$ のとき

$$p_1(m)+p_1(-m)=\begin{cases}1 & (m=\pm 1\ のとき)\\ 0 & (m\neq\pm 1\ のとき)\end{cases}$$

よって，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つと仮定する。

$m=\pm 1$ のとき

$$\begin{aligned}p_{k+1}(m)+p_{k+1}(-m)&=p_{k+1}(1)+p_{k+1}(-1)\\&=qp_k(0)+\frac{1}{2}p_k(2)+(1-q)p_k(0)+\frac{1}{2}p_k(-2)\\&=\frac{1}{2}\{p_k(0)+p_k(0)\}+\frac{1}{2}\{p_k(2)+p_k(-2)\}\end{aligned}$$

仮定から，この値は q によらない。

$m\neq\pm 1$ のとき

$$\begin{aligned}&p_{k+1}(m)+p_{k+1}(-m)\\&=\frac{1}{2}\{p_k(m+1)+p_k(m-1)\}+\frac{1}{2}\{p_k(-m+1)+p_k(-m-1)\}\\&=\frac{1}{2}\{p_k(m+1)+p_k(-m-1)\}+\frac{1}{2}\{p_k(m-1)+p_k(-m+1)\}\end{aligned}$$

仮定から，この値は q によらない。

よって，$n=k+1$ のときにも，① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n に対して，① は成り立つ。

(3)　$m=0$ のとき　　$p_n(m)+p_n(-m)=2p_n(0)$

よって，(2) から $p_n(0)$ は q によらない。

ゆえに，$q=\frac{1}{2}$ として $p_n(0)$ を計算すればよいから

n が奇数のとき　$p_n(0)=0$

n が偶数のとき　$p_n(0)={}_n\mathrm{C}_{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

参考　$q=0$ または $q=1$ としてもよい。

2 ●[理106]n人でじゃんけんをして勝った人数の期待値[2005 数学ⅠⅡＡＢ(理)106]

n を 2 以上の自然数とする。n 人全員が一組となってじゃんけんを 1 回するとき，勝った人数を X とする。ただし，あいこのときは $X=0$ とする。

(1)　ちょうど k 人が勝つ確率 $P(X=k)$ を求めよ。ただし，k は 1 以上とする。

(2)　あいこになる確率 $P(X=0)$ を求めよ。

(3)　X の期待値を求めよ。

解説

n 人の手の出し方は　3^n 通り　…… ①

(1)　[1]　$1\leqq k\leqq n-1$ のとき

勝つ k 人の選び方は　${}_n\mathrm{C}_k$ 通り

そのおのおのについて，勝ち方がグー，チョキ，パーの　3 通り

よって　$P(X=k)=\dfrac{{}_n\mathrm{C}_k\cdot 3}{3^n}=\dfrac{{}_n\mathrm{C}_k}{3^{n-1}}$

[2]　$k\geqq n$ のとき　$P(X=k)=0$

(2)　あいこになるのは，次の [1]，[2] のどちらかの場合である。

[1]　手の出し方が同じ場合　　3 通り

[2]　手の出し方が 3 種類の場合

① のうち，n 人が 2 種類の手 (グー，チョキ または　チョキ，パー または パー，グー) を出す場合と，[1] の場合を除けばよいから

$$3^n-3(2^n-2)-3=3^n-3\cdot 2^n+3\ (通り)$$

よって　$P(X=0)=\dfrac{3+(3^n-3\cdot 2^n+3)}{3^n}=1-\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}}$

別解　あいこになるという事象は，勝者が決まるという事象の余事象であるから

$$P(X=0)=1-\sum_{k=1}^{n-1}P(X=k)=1-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{3^{n-1}}=1-\frac{1}{3^{n-1}}({}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1})$$

ここで，二項定理により　$(1+1)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n$

よって　${}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}=2^n-{}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_n=2^n-2$

したがって　$P(X=0)=1-\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}}$

(3)　$E(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}kP(X=k)=\frac{1}{3^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}k\,{}_n\mathrm{C}_k=\frac{1}{3^{n-1}}\sum_{k=1}^{n-1}k\,{}_n\mathrm{C}_k$

ここで，$1\leqq k\leqq n$ のとき

$$k\,{}_n\mathrm{C}_k=k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}=n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

よって　　$E(X)=\dfrac{n}{3^{n-1}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}=\frac{n}{3^{n-1}}({}_{n-1}\mathrm{C}_0+{}_{n-1}\mathrm{C}_1+\cdots\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-2})$

ここで，二項定理により　$(1+1)^{n-1}={}_{n-1}\mathrm{C}_0+{}_{n-1}\mathrm{C}_1+\cdots\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-2}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}$

ゆえに　${}_{n-1}\mathrm{C}_0+{}_{n-1}\mathrm{C}_1+\cdots\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-2}=2^{n-1}-{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}=2^{n-1}-1$

したがって　$E(X)=\dfrac{n(2^{n-1}-1)}{3^{n-1}}$

3 ●[文144]条件を満たす(x, y)の動く領域[2005 数学ⅠⅡＡＢ(文理)144]

実数 t，s が $t>0$，$s>0$ の範囲を動くとき，$x=t+s$，$y=ts+\dfrac{1}{t}$ で定まる点 $(x,\ y)$ の動く範囲を xy 平面に図示せよ。

解説

$x=t+s$ ……①，　$y=ts+\dfrac{1}{t}$ ……② とおく。

$s>0$，$t>0$ から　　$x>0$，$y>0$
① から　　$s=x-t$　……③

これを ② に代入して　　$y=t(x-t)+\dfrac{1}{t}$

両辺に t (>0) を掛けて整理すると　　$t^3-xt^2+yt-1=0$　……④
また，$s>0$ から，③ より　　$t<x$
$t>0$ と合わせて　　$0<t<x$
よって，t の 3 次方程式 ④ が $0<t<x$ の範囲で少なくとも 1 つの実数解をもつような点 $(x,\ y)$ の存在範囲を求めればよい。

$f(t)=t^3-xt^2+yt-1$ とすると　　$f(0)=-1<0$

[1]　$f(x)>0$ のとき，④ は $0<t<x$ の範囲に少なくとも 1 つ実数解をもち，適する。

$f(x)>0$ から　$xy-1>0$　　　$x>0$ から　$y>\dfrac{1}{x}$

[2]　$f(x)\leqq 0$ すなわち $xy-1\leqq 0$ のとき

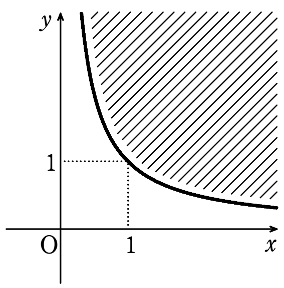
$0<t<x$ において　$f(t)=t^2(t-x)+yt-1<t^2(t-x)+xy-1<xy-1\leqq 0$

よって，④ は $0<t<x$ の範囲に実数解をもたない。

[1]，[2] から，求める範囲は

連立不等式　　$y>\dfrac{1}{x}$，$x>0$，$y>0$

の表す領域で，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含まない。

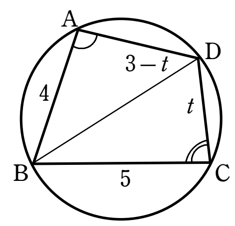


4 ○[理154]円に内接する四角形の面積の最大値[2005 数学ⅠⅡＡＢ(理)154]

四角形 ABCD において，AB$=4$，BC$=5$，CD$=t$，DA$=3-t$ $(0<t<3)$ とする。四角形 ABCD は外接円をもつとする。

(1)　$\cos C$ を t で表せ。
(2)　四角形 ABCD の面積 S を t で表せ。
(3)　S の最大値と，そのときの t の値を求めよ。

解説



(1)　四角形 ABCD は円に内接するから　$A+C=180°$

よって　$A=180°-C$

△ABD，△BCD に余弦定理を用いると

$$\mathrm{BD}^2=4^2+(3-t)^2-2\cdot 4\cdot(3-t)\cos(180°-C)$$
$$=t^2-6t+25+8(3-t)\cos C$$
$$\mathrm{BD}^2=5^2+t^2-2\cdot 5\cdot t\cos C=t^2+25-10t\cos C$$

よって　$t^2-6t+25+8(3-t)\cos C=t^2+25-10t\cos C$

整理して　$2(t+12)\cos C=6t$

$0<t<3$ であるから　$\cos C=\dfrac{3t}{t+12}$

(2)　$0°<C<180°$ より $\sin C>0$ であるから

$$\sin C=\sqrt{1-\left(\frac{3t}{t+12}\right)^2}=\frac{2\sqrt{-2t^2+6t+36}}{t+12}$$

また　$\sin A=\sin(180°-C)=\sin C$

よって　$S=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot(3-t)\sin A+\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot t\sin C$

$$=\frac{1}{2}(12+t)\sin C=\frac{1}{2}(12+t)\cdot\frac{2\sqrt{-2t^2+6t+36}}{t+12}=\sqrt{-2t^2+6t+36}$$

(3)　$S=\sqrt{-2t^2+6t+36}=\sqrt{-2\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{81}{2}}$

$0<t<3$ であるから，S は $t=\dfrac{3}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$ をとる。

$\boxed{5}$ ●［理202］定積分を含む等式の証明［2005 数学ⅠⅡＡＢ（理）202］

関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=\alpha$ で極大，$x=\beta$ で極小となると仮定する。

(1)　$f(\alpha)-f(\beta)=\dfrac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$ となることを示せ。

(2)　$f(\alpha)+f(\beta)=\dfrac{2}{\beta-\alpha}\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ が成り立つことを示せ。

解説

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ から　$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(x)$ は $x=\alpha$ で極大，$x=\beta$ で極小となるから，$f'(x)$ は $x=\alpha$，β のそれぞれの前後で符号が変わり，α，β は $f'(x)=0$ すなわち $3x^2+2ax+b=0$ の 2 つの解である。

ただし　　$\alpha<\beta$

解と係数の関係により　$\alpha+\beta=-\dfrac{2}{3}a$，$\alpha\beta=\dfrac{b}{3}$

よって　　$a=-\dfrac{3}{2}(\alpha+\beta)$，　$b=3\alpha\beta$

(1)　$f(\alpha)-f(\beta)=(\alpha^3-\beta^3)+a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)$

$$=(\alpha-\beta)\{(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+a(\alpha+\beta)+b\}$$

$$=(\alpha-\beta)\left\{(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)^2+3\alpha\beta\right\}$$

$$=(\alpha-\beta)\cdot\frac{1}{2}\{-(\alpha-\beta)^2\}=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$$

別解　α，β は $f'(x)=0$ の 2 つの解であるから

$$f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$$

とおける。

よって　$f(\alpha)-f(\beta)=\displaystyle\int_\beta^\alpha f'(x)\,dx=3\int_\beta^\alpha (x-\alpha)(x-\beta)dx=3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\alpha-\beta)^3$

$$=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$$

(2)　$f(\alpha)+f(\beta)=(\alpha^3+\beta^3)+a(\alpha^2+\beta^2)+b(\alpha+\beta)+2c$

$$=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+a\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+b(\alpha+\beta)+2c$$

$$=\left(-\frac{2}{3}a\right)^3-3\cdot\frac{b}{3}\left(-\frac{2}{3}a\right)+a\left\{\left(-\frac{2}{3}a\right)^2-2\cdot\frac{b}{3}\right\}+b\left(-\frac{2}{3}a\right)+2c$$

$$=\frac{4}{27}a^3-\frac{2}{3}ab+2c$$

また　$\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta (x^3+ax^2+bx+c)dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_\alpha^\beta$

$$=\frac{\beta^4-\alpha^4}{4}+\frac{a}{3}(\beta^3-\alpha^3)+\frac{b}{2}(\beta^2-\alpha^2)+c(\beta-\alpha)$$

$$=\frac{\beta-\alpha}{12}\{3(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)+4a(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+6b(\alpha+\beta)+12c\}$$

$\alpha^2+\beta^2=\dfrac{4}{9}a^2-\dfrac{2}{3}b$ であるから

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\frac{\beta-\alpha}{12}\left\{-2a\left(\frac{4}{9}a^2-\frac{2}{3}b\right)+4a\left(\frac{4}{9}a^2-\frac{2}{3}b+\frac{b}{3}\right)+6b\cdot\left(-\frac{2}{3}a\right)+12c\right\}$$

$$=\frac{\beta-\alpha}{12}\left(\frac{8}{9}a^3-4ab+12c\right)$$

よって　$\dfrac{2}{\beta-\alpha}\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\frac{1}{6}\left(\frac{8}{9}a^3-4ab+12c\right)=\frac{4}{27}a^3-\frac{2}{3}ab+2c$

したがって　　$f(\alpha)+f(\beta)=\dfrac{2}{\beta-\alpha}\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$

参考　$f(x)=\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{a}{9}\right)f'(x)+\left(\dfrac{2}{3}b-\dfrac{2}{9}a^2\right)x+c-\dfrac{ab}{9}$，$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ を利用して計算してもよい。

$\boxed{6}$ ●[理220]f(t)=S(t)/Tの最大値[2005 数学ⅠⅡＡＢ(理)220]

放物線 R : $y=-x^2+3$ と直線 ℓ : $y=2x$ との交点を A，B とする。直線 $y=2x+t$ $(t>0)$ は放物線 R と相異なる 2 点 C(t)，D(t) で交わるものとする。

(1)　放物線 R と直線 ℓ とで囲まれた図形の面積 T を求めよ。

(2)　4 つの点 A，B，C(t)，D(t) を頂点とする台形の面積を $S(t)$ とし，$f(t)=\dfrac{S(t)}{T}$ とおく。$f(t)$ の最大値を求めよ。

(解説)

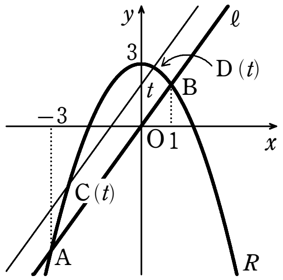
(1)　$-x^2+3=2x$ とすると　　$x^2+2x-3=0$

これを解くと　　$x=-3,\ 1$

したがって

$$T=\int_{-3}^{1}\{(-x^2+3)-2x\}dx=-\int_{-3}^{1}(x+3)(x-1)dx$$

$$=\frac{1}{6}(1+3)^3=\frac{32}{3}$$



(2)　$f(t)=\dfrac{S(t)}{T}=\dfrac{3}{32}S(t)$

よって，$f(t)$ が最大となるのは，$S(t)$ が最大となるときである。

$y=2x+t$ ……① とする。

$-x^2+3=2x+t$ とすると　$x^2+2x+t-3=0$ ……②

直線 ① と放物線 R が相異なる 2 点で交わるから，② の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=1^2-(t-3)>0$$

これを解いて　　$t<4$

$t>0$ と合わせて　　$0<t<4$ ……③

このとき，② の 2 つの解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，① の傾きが 2 であるから，

C(t) D(t) の長さは　$\sqrt{5}|\beta-\alpha|=\sqrt{5}\sqrt{D}=2\sqrt{5}\sqrt{4-t}$

また　　$\mathrm{AB}=\sqrt{5}\{1-(-3)\}=4\sqrt{5}$

台形の高さは ① 上の点 $(0,\ t)$ と直線 ℓ : $2x-y=0$ との距離に等しいから

$$\frac{|2\cdot 0-t|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|t|}{\sqrt{5}}=\frac{t}{\sqrt{5}}$$

よって　　$S(t)=\dfrac{1}{2}(2\sqrt{5}\sqrt{4-t}+4\sqrt{5})\times\dfrac{t}{\sqrt{5}}=t(\sqrt{4-t}+2)$

$\sqrt{4-t}=s$，$S(t)=F(s)$ とおくと　　$t=4-s^2$

③ から　　$0<s<2$ ……④

また　　$F(s)=(4-s^2)(s+2)=(2-s)(s+2)^2=-s^3-2s^2+4s+8$

　　　　$F'(s)=-3s^2-4s+4=-(s+2)(3s-2)$

$F'(s)=0$ とすると　$s=-2,\ \dfrac{2}{3}$

④ の範囲で $F(s)$ の増減表は次のようになる。

s	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2
$F'(s)$		$+$	0	$-$	
$F(s)$		↗	極大	↘	

よって，$F(s)$ は $s=\dfrac{2}{3}$ のとき極大かつ最大となる。

したがって，求める最大値は

$$\frac{3}{32}\times F\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{32}\times\left(2-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}+2\right)^2=\frac{3}{32}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{64}{9}=\frac{8}{9}$$

別解　$S(t)=t(2+\sqrt{4-t})$ を微分 (数学Ⅲで学習) すると

$$S'(t)=2+\sqrt{4-t}-\frac{t}{2\sqrt{4-t}}=\frac{4\sqrt{4-t}-(3t-8)}{2\sqrt{4-t}}$$

これを利用して，$S(t)$ の最大値を求めてもよい。

$\boxed{7}$ ●[理267]条件x+y, 2x+3yが2, 5の倍数などを満たす格子点の個数[2005 数学ⅠⅡＡＢ(理)267]

xy 平面上で次の条件 (A)，(B)，(C) を満たす点 $(x,\ y)$ は何個あるか。

(A)　x，y はともに整数

(B)　$1\leqq x\leqq 100$，$1\leqq y\leqq 100$

(C)　$x+y$ は 2 の倍数，$2x+3y$ は 5 の倍数

(解説)

(C) より，$x+y$ は 2 の倍数であるから，x，y はともに偶数またはともに奇数のいずれかである。

[1]　x，y がともに偶数のとき

$x=2k$，$y=2l$ (k，l は整数) とおける。

(B) により　$1\leqq k\leqq 50$，$1\leqq l\leqq 50$

また，(C) により

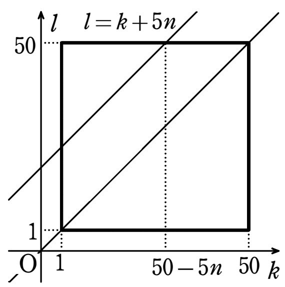
　$2x+3y=4k+6l=5(k+l)+l-k$

が 5 の倍数であるから，$l-k$ は 5 の倍数となる。

したがって，対称性から

$$2\sum_{n=1}^{9}(50-5n)+50=2\times\frac{1}{2}\cdot 9\cdot(45+5)+50$$

$$=500\ (個)$$



[2]　x，y がともに奇数のとき

$x=2k-1$，$y=2l-1$ (k，l は整数) とおける。

(B) により　　$1\leqq k\leqq 50$，$1\leqq l\leqq 50$

また，(C) により　$2x+3y=4k-2+6l-3=5(k+l-1)+l-k$

が 5 の倍数であるから，$l-k$ は 5 の倍数となる。

[1] と同様に　　500 個

[1]，[2] から，求める点の個数は　$500\times 2=1000$ (個)

$\boxed{8}$ ●[3C44]三角関数で表された数列, 極限など[2005 数学ⅢC44]

実数 x および自然数 n に対して，$a_n=\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$ とする。

(1) $2^n a_n\sin\dfrac{x}{2^n}$ の値は，n と無関係に一定であることを証明せよ。

(2) $\log|a_n|$ を x で微分することにより $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{2^n}=\frac{1}{\pi}$ を証明せよ。

(解説)

(1)
$$2^n a_n\sin\frac{x}{2^n}=2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}$$
$$=2^{n-1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\left(2\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}\right)$$
$$=2^{n-1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}}$$
$$=2^{n-1}a_{n-1}\sin\frac{x}{2^{n-1}}=\cdots\cdots=2a_1\sin\frac{x}{2}=2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}=\sin x$$

よって，n と無関係に一定である。

(2)
$$\log|a_n|=\log\left|\cos\frac{x}{2}\right|+\log\left|\cos\frac{x}{2^2}\right|+\cdots\cdots+\log\left|\cos\frac{x}{2^n}\right| \quad\cdots\cdots①$$

また $2^n a_n\sin\dfrac{x}{2^n}=\sin x$ から，$\sin\dfrac{x}{2^n}\neq 0$ のとき　$a_n=\dfrac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}$

よって
$$\log|a_n|=\log\left|\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\right|=-n\log 2+\log|\sin x|-\log\left|\sin\frac{x}{2^n}\right| \quad\cdots\cdots②$$

①，②から　$\log|\sin x|-\log\left|\sin\dfrac{x}{2^n}\right|-n\log 2=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log\left|\cos\frac{x}{2^k}\right|$

両辺を x で微分すると
$$\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\cdot\frac{-\sin\frac{x}{2^k}}{\cos\frac{x}{2^k}}\right)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}$$

両辺を $-\dfrac{1}{2}$ 倍すると　$-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{1}{2^{n+1}}\cdot\dfrac{\cos\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{x}{2^k}$

ここで $x=\dfrac{\pi}{2}$ を代入すると
$$-\frac{1}{2}\times\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2^{n+1}}\times\frac{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{\pi}{2^{k+1}}=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{2^k}\tan\frac{\pi}{2^k}$$

よって
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{2^k}\tan\frac{\pi}{2^k}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\times\frac{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\pi}\times\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}\right)=\frac{1}{\pi}$$

$\boxed{9}$ ●[3C90] f(x)の性質から等式の証明, 定積分[2005 数学ⅢC90]

(1) 連続関数 $f(x)$ が，すべての実数 x について $f(\pi-x)=f(x)$ を満たすとき，

$\displaystyle\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx=0$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}dx$ を求めよ。

(解説)

(1) $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx$ とおく。

$t=\pi-x$ とおくと　$x=\pi-t,\ dx=-dt$

x	$0\longrightarrow\pi$
t	$\pi\longrightarrow 0$

したがって
$$I=\int_{\pi}^{0}\left(\pi-t-\frac{\pi}{2}\right)f(\pi-t)(-1)dt$$
$$=\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)f(\pi-t)\,dt=\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)f(t)\,dt=-\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx=-I$$

よって　$I=0$　　すなわち　$\displaystyle\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx=0$

(2) $J=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}dx$ とおく。

$f(x)=\dfrac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}$ とすると　$f(\pi-x)=\dfrac{\sin^3(\pi-x)}{4-\cos^2(\pi-x)}=\dfrac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}=f(x)$

よって，(1) から
$$J=\int_0^{\pi}xf(x)\,dx=\int_0^{\pi}\left\{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)+\frac{\pi}{2}f(x)\right\}dx$$
$$=\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx+\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos^2 x}{4-\cos^2 x}\cdot\sin x\,dx$$

$u=\cos x$ とおくと　$-\sin x\,dx=du$

x	$0\longrightarrow\ \pi$
u	$1\longrightarrow -1$

したがって
$$J=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{1-u^2}{4-u^2}\cdot(-1)du=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{u^2-1}{u^2-4}du$$
$$=\frac{\pi}{2}\cdot 2\int_0^1\frac{u^2-1}{u^2-4}du=\pi\int_0^1\left(1+\frac{3}{u^2-4}\right)du=\pi\int_0^1\left\{1+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u+2}\right)\right\}du$$
$$=\pi\left[u+\frac{3}{4}(\log|u-2|-\log|u+2|)\right]_0^1=\pi\left[u+\frac{3}{4}\log\left|\frac{u-2}{u+2}\right|\right]_0^1=\pi\left(1-\frac{3}{4}\log 3\right)$$

$\boxed{10}$ ●[3C137]f(x)=|e^-xsinx|とx軸で囲む面積など[2005 数学ⅢC 137]

$f(x)=|e^{-x}\sin x|$ とする。曲線 $y=f(x)$ の $(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ (n は自然数) の部分と x 軸で囲まれる図形の面積を S_n とする。

(1) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で，$f(x)=0$ を満たす x の値および $f(x)$ の極大値を与える x の値を求めよ。

(2) 不定積分 $\int e^{-x}\sin x\,dx$ を求めよ。

(3) 面積 S_n を求めよ。

(4) 無限級数の和 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を求めよ。

解説

(1) $f(x)=0$ とすると，$e^{-x}|\sin x|=0$ より　$\sin x=0$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ であるから　$x=0,\ \pi,\ 2\pi$

[1] $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき

$f(x)=e^{-x}\sin x$ であるから　$f'(x)=e^{-x}(-\sin x+\cos x)=\sqrt{2}\,e^{-x}\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)$

$f'(x)=0$ とすると　$\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)=0$　　$0<x<\pi$ においては　$x=\frac{\pi}{4}$

[2] $\pi \leqq x \leqq 2\pi$ のとき

$f(x)=-e^{-x}\sin x$ から　$f'(x)=-\sqrt{2}\,e^{-x}\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\frac{5}{4}\pi$

[1], [2] から，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	極大	↘	極小	↗	極大	↘	0

よって，極大値を与える x の値は　$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$

(2) $\int e^{-x}\sin x\,dx=\int(-e^{-x})'\sin x\,dx=-e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos x\,dx$

$$=-e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin x\,dx$$

よって　$\int e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C$ (C は積分定数)

(3) $S_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|e^{-x}\sin x|dx=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}e^{-x}|\sin x|dx$

$t=x-(n-1)\pi$ とおくと　$dx=dt$

x	$(n-1)\pi \longrightarrow n\pi$
t	$0 \longrightarrow \pi$

$S_n=\int_0^{\pi}e^{-t-(n-1)\pi}|\sin\{t+(n-1)\pi\}|dt$

$$=e^{-(n-1)\pi}\int_0^{\pi}e^{-t}|\sin t|dt=e^{-(n-1)\pi}\int_0^{\pi}e^{-t}\sin t\,dt$$

$$=e^{-(n-1)\pi}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\Big[e^{-x}(\sin x+\cos x)\Big]_0^{\pi}=-\frac{1}{2}e^{-(n-1)\pi}\times(-e^{-\pi}-1)$$

$$=\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)e^{-(n-1)\pi}$$

(4) $0<e^{-\pi}<1$ であるから，$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(n-1)\pi}$ は収束する。

よって　$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(n-1)\pi}=\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)\times\frac{1}{1-e^{-\pi}}=\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}$

$\boxed{11}$ ○[3C187]等式から成分の条件など[2005 数学ⅢC 187]

$p,\ q,\ r,\ s$ を実数として，行列 $A=\begin{pmatrix}1 & p\\ q & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & r\\ s & 1\end{pmatrix}$ を考える。

(1) $AB-BA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ となるための条件を求めよ。

(2) (1) が成り立つとき，$A^2B-BA^2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ を示し，

$A^3-B^3-(A-B)(A^2+AB+B^2)$ を求めよ。

解説

(1) $AB=\begin{pmatrix}1 & p\\ q & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & r\\ s & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ps+1 & r+p\\ q+s & qr+1\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}1 & r\\ s & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & p\\ q & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}qr+1 & p+r\\ s+q & ps+1\end{pmatrix}$

よって　$AB-BA=\begin{pmatrix}ps-qr & 0\\ 0 & qr-ps\end{pmatrix}$

ゆえに，$AB-BA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ となるための条件は　$ps-qr=1$

(2) $AB-BA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$　……①

① の両辺に左から A を掛けると　$A^2B-ABA=\begin{pmatrix}1 & p\\ q & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

すなわち　$A^2B-ABA=\begin{pmatrix}1 & -p\\ q & -1\end{pmatrix}$　……②

① の両辺に右から A を掛けると　$ABA-BA^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & p\\ q & 1\end{pmatrix}$

すなわち　$ABA-BA^2=\begin{pmatrix}1 & p\\ -q & -1\end{pmatrix}$　……③

②+③ から　$A^2B-BA^2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$

また　$A^3-B^3-(A-B)(A^2+AB+B^2)$

$$=A^3-B^3-A(A^2+AB+B^2)+B(A^2+AB+B^2)$$

$$=A^3-B^3-A^3-A^2B-AB^2+BA^2+BAB+B^3$$

$$=-A^2B-AB^2+BA^2+BAB=-(A^2B-BA^2)-(AB-BA)B$$

$$=-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & r\\ s & 1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & r\\ -s & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -r\\ s & 3\end{pmatrix}$$

12 ●[3C194]等式の条件から成分の関係式など[2005 数学ⅢＣ194]

2 次正方行列 $X=\begin{pmatrix} a & 2-a \\ 1-a & 3-b \end{pmatrix}$ と $Y=\begin{pmatrix} c & 1-c \\ 2-c & c \end{pmatrix}$ について，次の等式が成り立つとする。ただし，a，b，c は実数とする。

$$(X+Y)(X-Y)=X^2-Y^2$$

(1)　b と c を，それぞれ a で表せ。

(2)　$Z=X^2+2XY+Y^2$ とする。Z の各成分を a，b，c を用いずに表せ。

(3)　$X^4=kE$ (k は実数) を満たす X および k を求めよ。ここで，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

解説

$(X+Y)(X-Y)=X^2-Y^2$ から　$X^2-XY+YX-Y^2=X^2-Y^2$

よって　　$XY=YX$

(1)　$XY=\begin{pmatrix} a & 2-a \\ 1-a & 3-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 1-c \\ 2-c & c \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} ac+(2-a)(2-c) & a(1-c)+(2-a)c \\ (1-a)c+(3-b)(2-c) & (1-a)(1-c)+(3-b)c \end{pmatrix}$

$YX=\begin{pmatrix} c & 1-c \\ 2-c & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 2-a \\ 1-a & 3-b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ca+(1-c)(1-a) & c(2-a)+(1-c)(3-b) \\ (2-c)a+c(1-a) & (2-c)(2-a)+c(3-b) \end{pmatrix}$

$XY=YX$ であるから　$ac+(2-a)(2-c)=ca+(1-c)(1-a)$

$a(1-c)+(2-a)c=c(2-a)+(1-c)(3-b)$

$(1-a)c+(3-b)(2-c)=(2-c)a+c(1-a)$

$(1-a)(1-c)+(3-b)c=(2-c)(2-a)+c(3-b)$

整理して　　$a+c=3$　　　　　…… ①

$(1-c)(a+b-3)=0$　…… ②

$(2-c)(a+b-3)=0$　…… ③

$a+c=3$　　　　　…… ④

②，③ から　$a+b-3=0$　　　よって　$b=3-a$

①，④ から　$c=3-a$

(2)　$XY=YX$ であるから

$$Z=X^2+2XY+Y^2=X^2+XY+XY+Y^2=X^2+XY+YX+Y^2=(X+Y)^2$$

(1) より　$X=\begin{pmatrix} a & 2-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix} 3-a & a-2 \\ a-1 & 3-a \end{pmatrix}$ であるから　$X+Y=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=3E$

よって　$Z=(3E)^2=9E^2=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

(3)　ハミルトン・ケーリーの定理により　$X^2-2aX+(3a-2)E=O$

よって　$X^4=\{2aX-(3a-2)E\}^2=4a^2X^2-4a(3a-2)X+(3a-2)^2E$

$=4a^2\{2aX-(3a-2)E\}-4a(3a-2)X+(3a-2)^2E$

$=4a(2a^2-3a+2)X-(3a-2)(4a^2-3a+2)E$

$X^4=kE$ とすると　$4a(2a^2-3a+2)X-(3a-2)(4a^2-3a+2)E=kE$

整理して　　　$4a(2a^2-3a+2)X=\{(3a-2)(4a^2-3a+2)+k\}E$

X は E の実数倍ではないから

$4a(2a^2-3a+2)=0$　…… ⑤，$(3a-2)(4a^2-3a+2)+k=0$　…… ⑥

a は実数であるから，⑤ より　$a=0$

これを ⑥ に代入して　$k=4$

したがって　　$X=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$k=4$

13 ●正四面体上の動点，ベクトル表示[2005]

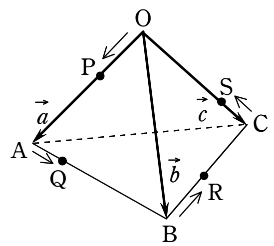
1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考え，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。動点 P は O から A へ辺 OA 上を秒速 1 で，動点 Q は A から B へ辺 AB 上を秒速 $\frac{1}{2}$ で，動点 R は B から C へ辺 BC 上を秒速 1 で，動点 S は C から O へ辺 CO 上を秒速 $\frac{1}{2}$ で，同時に動き出す。

(1)　動き出してから t 秒後 $(0\leqq t\leqq 1)$ のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および t を用いて表せ。

(2)　線分 PR と線分 QS が交点 M をもつときの $t\,(0\leqq t\leqq 1)$ の値を求め，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

解説

(1)　正四面体の 1 辺の長さは 1 であるから



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(1-\frac{t}{2}\right)\vec{a}+\frac{t}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\left(1-\frac{t}{2}\right)\vec{c}$

(2)　線分 PR と線分 QS が交点 M をもつとき，

PM : MR $=x:(1-x)$，QM : MS $=y:(1-y)$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(1-x)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+x\overrightarrow{\mathrm{OR}}$　$(0\leqq x\leqq 1)$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(1-y)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+y\overrightarrow{\mathrm{OS}}$　$(0\leqq y\leqq 1)$

これらに (1) の結果を代入して

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(1-x)t\vec{a}+x\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\}=(1-x)t\vec{a}+x(1-t)\vec{b}+xt\vec{c}$　…… ①

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(1-y)\left\{\left(1-\frac{t}{2}\right)\vec{a}+\frac{t}{2}\vec{b}\right\}+y\left(1-\frac{t}{2}\right)\vec{c}$

$=(1-y)\left(1-\frac{t}{2}\right)\vec{a}+\frac{1}{2}(1-y)t\vec{b}+y\left(1-\frac{t}{2}\right)\vec{c}$　…… ②

4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから，①，② により

$(1-x)t=(1-y)\left(1-\frac{t}{2}\right)$　…… ③

$x(1-t)=\frac{1}{2}(1-y)t$　…… ④

$xt=y\left(1-\frac{t}{2}\right)$　…… ⑤

③＋⑤ から　　$t=1-\frac{t}{2}$

よって　　$t=\frac{2}{3}$　　　$(0\leqq t\leqq 1$ を満たす$)$

このとき，④ から　　$x=1-y$

⑤ から　　$x=y$

ゆえに　　$x=y=\frac{1}{2}$　$(0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1$ を満たす$)$

求めた x，y，t の値を ① に代入して　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

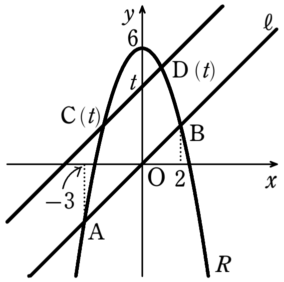
$\boxed{14}$ ●平行な2直線と放物線の交点が作る台形の面積[2005]

放物線 $R: y=-x^2+6$ と直線 ℓ ：$y=x$ との交点を A，B とする。直線 $y=x+t\,(t>0)$ は放物線 R と相異なる 2 点 C(t)，D(t) で交わるものとする。

(1)　放物線 R と直線 ℓ とで囲まれた図形の面積 T を求めよ。

(2)　4 つの点 A，B，C(t)，D(t) を頂点とする台形の面積を $S(t)$ とし，$f(t)=\dfrac{S(t)}{T}$ とおく。$f(t)$ の最大値を求めよ。

解説



(1)　$-x^2+6=x$ とすると　$x^2+x-6=0$

これを解くと　$x=-3,\ 2$

したがって

$$T=\int_{-3}^{2}\{(-x^2+6)-x\}dx=-\int_{-3}^{2}(x+3)(x-2)dx$$

$$=\frac{1}{6}(2+3)^3=\frac{125}{6}$$

(2)　$f(t)=\dfrac{S(t)}{T}=\dfrac{6}{125}S(t)$

よって，$f(t)$ が最大となるのは，$S(t)$ が最大となるときである。

$y=x+t$ ……① とする。

$-x^2+6=x+t$ とすると　$x^2+x+t-6=0$　……②

直線 ① と放物線 R が相異なる 2 点で交わるから，② の判別式を D とすると

$$D=1^2-4(t-6)>0$$

これを解いて　$t<\dfrac{25}{4}$

$t>0$ と合わせて　$0<t<\dfrac{25}{4}$ ……③

このとき，② の 2 つの解を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，① の傾きが 1 であるから，

C(t) D(t)の長さは　$\sqrt{2}\,|\beta-\alpha|=\sqrt{2}\sqrt{D}=\sqrt{2}\sqrt{25-4t}$

また　AB$=\sqrt{2}\{2-(-3)\}=5\sqrt{2}$

台形の高さは ① 上の点 $(0,\ t)$ と直線 ℓ ：$x-y=0$ との距離に等しいから

$$\frac{|0-t|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|t|}{\sqrt{2}}=\frac{t}{\sqrt{2}}$$

よって　　$S(t)=\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}\sqrt{25-4t}+5\sqrt{2})\times\dfrac{t}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}t(\sqrt{25-4t}+5)$

$\sqrt{25-4t}=s$ とおくと　$t=\dfrac{25-s^2}{4}$

また，③ から　　$0<s<5$ ……④

$S(t)=F(s)$ とおくと　$F(s)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{25-s^2}{4}(s+5)=\dfrac{1}{8}(-s^3-5s^2+25s+125)$

$$F'(s)=\frac{1}{8}(-3s^2-10s+25)=-\frac{1}{8}(s+5)(3s-5)$$

④ の範囲で $F(s)$ の増減表は次のようになる。

s	0	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	5
$F'(s)$		+	0	−	
$F(s)$		↗	極大	↘	

よって，$F(s)$ は $s=\dfrac{5}{3}$ のとき極大かつ最大となる。

$F(s)=\dfrac{1}{8}(5-s)(5+s)^2$ であるから，$F(s)$ (すなわち $S(t)$) の最大値は

$$F\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{1}{8}\left(5-\frac{5}{3}\right)\left(5+\frac{5}{3}\right)^2=\frac{1}{8}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{400}{9}=\frac{500}{27}$$

したがって，$f(t)$ の最大値は　$\dfrac{6}{125}\times\dfrac{500}{27}=\dfrac{8}{9}$

参考　$f(t)$ を最大にする t の値は $t=\dfrac{50}{9}$ である。

$\boxed{15}$ ●カードの確率, 対数方程式, 方程式の整数解[2005]

1 から 13 までの数が 1 つ書かれているカードが 52 枚あり，各数について 4 枚ずつある。この 52 枚のカードから，戻さずに続けて 2 枚取り出し，そのカードに書かれた数を順に x，y とする。関数 $f(x,\ y)=\log_3(x+y)-\log_3 x-\log_3 y+1$ を考える。

(1)　カードに書かれた数 x，y で，$f(x,\ y)=0$ となるものをすべて求めよ。

(2)　$f(x,\ y)=0$ となる確率を求めよ。

解説

(1)　$1\leqq x\leqq 13$，$1\leqq y\leqq 13$ であるから，対数の真数 $x+y$，x，y は正の数である。

$f(x,\ y)=0$ とすると　$\log_3(x+y)-\log_3 x-\log_3 y+1=0$

これを変形して　$\log_3(x+y)+1=\log_3 x+\log_3 y$

$\log_3 3(x+y)=\log_3 xy$

よって　　$xy=3(x+y)$

ゆえに　　$(x-3)(y-3)=9$　……①

$1\leqq x\leqq 13$，$1\leqq y\leqq 13$ から　$-2\leqq x-3\leqq 10$，$-2\leqq y-3\leqq 10$　……②

$x-3$，$y-3$ は整数であるから，①，② より　$(x-3,\ y-3)=(1,\ 9),\ (3,\ 3),\ (9,\ 1)$

よって　　$(x,\ y)=(4,\ 12),\ (6,\ 6),\ (12,\ 4)$

(2)　(1) から，求める確率は　$\dfrac{4\times4+4\times3+4\times4}{52\times51}=\dfrac{4+3+4}{13\times51}=\dfrac{11}{663}$