1 ●[文49]f(√2)=0, f(ω)(ωは1の3乗根)が実数のとき係数a, b, c[2006 数学ⅠⅡAB(文理)49]

a，b，c を整数とし，x についての 3 次式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ を考える。

$f(x)$ が次の条件

(i)　$f(\sqrt{2})=0$

(ii)　$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とおくと，$f(\omega)$ は実数

を満たすとき，a，b，c の値を求めよ。ただし，i は虚数単位 $(i^2=-1)$ である。

解説

(i) から　$(\sqrt{2})^3+a(\sqrt{2})^2+b\sqrt{2}+c=0$

よって　$(2a+c)+(b+2)\sqrt{2}=0$

a，b，c は整数(有理数)，$\sqrt{2}$ は無理数であるから

$2a+c=0$，$b+2=0$

ゆえに　$c=-2a$，$b=-2$　……①

よって　$f(x)=x^3+ax^2-2x-2a$

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ は 1 の 3 乗根であり，$\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$ が成り立つ。

よって　$f(\omega)=\omega^3+a\omega^2-2\omega-2a$

$=1+a(-\omega-1)-2\omega-2a$

$=-(a+2)\omega-3a+1$

ω は虚数であるから，$f(\omega)$ が実数であるための条件は

$a+2=0$　　ゆえに　$a=-2$

これと ① から　$a=-2$，$b=-2$，$c=4$

2 ●[理56]f(x)-2f(x+1)+f(x+2)>0を満たす関数f(x)[2006 数学ⅠⅡAB(理)56]

p，q は自然数とする。

(1)　実数 x に対して実数 $y=f(x)$ を定める関数 $f(x)$ が，任意の実数 x に対して

$$f(x)-2f(x+1)+f(x+2)>0 \quad \cdots\cdots(*)$$

を満たせば，任意の実数 x に対して

$$f(x)-\frac{p+q}{q}f(x+p)+\frac{p}{q}f(x+p+q)>0$$

が成り立つことを示せ。

(2)　a，b，c を $a-\dfrac{p+q}{q}b+\dfrac{p}{q}c>0$ を満たす定数とする。このとき，$f(0)=a$，$f(p)=b$，$f(p+q)=c$ でかつ任意の実数 x に対して $(*)$ を満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

(3)　h，k が実数で，$h=\dfrac{p+q}{q}$ と $k=\dfrac{p}{q}$ の両方が成り立つことはないものとする。このとき，任意の実数 x に対して $(*)$ を満たすが，ある実数 x に対しては $f(x)-hf(x+p)+kf(x+p+q)>0$ が成り立たないような関数 $f(x)$ が存在することを証明せよ。

解説

(1)　$(*)$ から　$f(x+2)-f(x+1)>f(x+1)-f(x)$

これが任意の実数 x について成り立つから

$$\begin{aligned} f(x+p)-f(x) &= \{f(x+p)-f(x+p-1)\}+\{f(x+p-1)-f(x+p-2)\} \\ &\quad +\cdots\cdots+\{f(x+1)-f(x)\} \\ &\leqq p\{f(x+p)-f(x+p-1)\} \end{aligned}$$

(等号は $p=1$ のとき成り立つ)

よって　$\dfrac{f(x+p)-f(x)}{p}\leqq f(x+p)-f(x+p-1)$

$$\begin{aligned} f(x+p+q)-f(x+p) &= \{f(x+p+q)-f(x+p+q-1)\} \\ &\quad +\{f(x+p+q-1)-f(x+p+q-2)\} \\ &\quad +\cdots\cdots+\{f(x+p+1)-f(x+p)\} \\ &\geqq q\{f(x+p+1)-f(x+p)\} \end{aligned}$$

(等号は $q=1$ のとき成り立つ)

$$>q\{f(x+p)-f(x+p-1)\}$$

よって　$\dfrac{f(x+p+q)-f(x+p)}{q}>f(x+p)-f(x+p-1)$

ゆえに　$\dfrac{f(x+p+q)-f(x+p)}{q}>\dfrac{f(x+p)-f(x)}{p}$

これを変形して　$f(x)-\dfrac{p+q}{q}f(x+p)+\dfrac{p}{q}f(x+p+q)>0$

(2)　$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ $(\alpha\neq 0)$ とおく。

$f(0)=a$，$f(p)=b$，$f(p+q)=c$ から

$\gamma=a$　……①，　$\alpha p^2+\beta p+\gamma=b$　……②，

$\alpha(p+q)^2+\beta(p+q)+\gamma=c$　……③

① を ②，③ に代入して

$p^2\alpha+p\beta+a=b$　……④，　$(p+q)^2\alpha+(p+q)\beta+a=c$　……⑤

⑤$\times p-$④$\times(p+q)$ から

$pq(p+q)\alpha=aq-b(p+q)+cp$

よって　$\alpha=\dfrac{aq-b(p+q)+cp}{pq(p+q)}$

④$\times(p+q)^2-$⑤$\times p^2$ から

$pq(p+q)\beta=-aq(2p+q)+b(p+q)^2-cp^2$

よって　$\beta=-\dfrac{aq(2p+q)-b(p+q)^2+cp^2}{pq(p+q)}$

このとき　$f(x)-2f(x+1)+f(x+2)$

$=\alpha x^2+\beta x+\gamma-2\{\alpha(x+1)^2+\beta(x+1)+\gamma\}+\alpha(x+2)^2+\beta(x+2)+\gamma$

$=\alpha\{x^2-2(x+1)^2+(x+2)^2\}+\beta\{x-2(x+1)+(x+2)\}$

$=2\alpha=2\cdot\dfrac{aq-b(p+q)+cp}{pq(p+q)}=2\cdot\dfrac{a-\dfrac{p+q}{q}b+\dfrac{p}{q}c}{p(p+q)}>0$

したがって　$f(x)=\dfrac{aq-b(p+q)+cp}{pq(p+q)}x^2-\dfrac{aq(2p+q)-b(p+q)^2+cp^2}{pq(p+q)}x+a$

(3)　(2) より，$a-\dfrac{p+q}{q}b+\dfrac{p}{q}c>0$ であれば，$f(0)=a$，$f(p)=b$，$f(p+q)=c$ かつ $(*)$ を満たす $f(x)$ が存在する。

$a-hb+kc\leqq 0$ ならば $f(x)-hf(x+p)+kf(x+p+q)>0$ は $x=0$ のとき成り立たない。

よって，$a-\dfrac{p+q}{q}b+\dfrac{p}{q}c>0$ かつ $a-hb+kc\leqq 0$ を満たす実数 a，b，c が存在することを示せばよい。

この 2 つの不等式を変形すると　$\dfrac{p+q}{q}b-\dfrac{p}{q}c<a\leqq hb-kc$

これを満たす実数 a が存在するための条件は

$$\frac{p+q}{q}b-\frac{p}{q}c<hb-kc \quad \cdots\cdots(\text{A})$$

を満たす実数 b，c が存在することである。

ここで　$hb-kc-\left(\dfrac{p+q}{q}b-\dfrac{p}{q}c\right)=\left(h-\dfrac{p+q}{q}\right)b+\left(\dfrac{p}{q}-k\right)c$　……(B)

[1]　$h>\dfrac{p+q}{q}$ のとき　$b=1$，$c=0$ とすれば (B) は正となる。

[2]　$h<\dfrac{p+q}{q}$ のとき　$b=-1$，$c=0$ とすれば (B) は正となる。

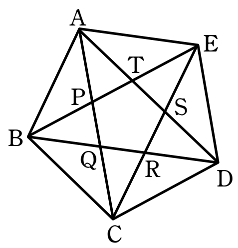
[3]　$k<\dfrac{p}{q}$ のとき　$b=0$，$c=1$ とすれば (B) は正となる。

[4]　$k>\dfrac{p}{q}$ のとき　$b=0$，$c=-1$ とすれば (B) は正となる。

したがって，(A) を満たす実数 b，c が存在する。

3 ●[理80] 正五角形の頂点, 対角線の交点へコインを置く方法[2006 数学ＩⅡＡＢ(理)80]

正五角形 ABCDE の頂点 A と C，C と E，E と B，B と D，D と A をそれぞれ結んだ 5 本の対角線を考えると，それらは図のように 5 つの点 P，Q，R，S，T で交わる。この 5 つの点 P，Q，R，S，T 上にそれぞれ 1 枚ずつ，表裏が定まったコインが置かれ固定されているとする。



今，表裏が定まっていて互いに区別のつかない 5 枚のコインを新たに用意し，5 つの点 A，B，C，D，E 上に 1 枚ずつ置く。すると各対角線上にはそれぞれ 4 枚のコインが並ぶことになる。

どの対角線上にも表のコインが偶数枚置かれているような，A，B，C，D，E 上へのコインの置き方は何通りあるか。

解説

P，Q，R，S，T に置かれているコインの表裏は固定されているから，A に置くコインの表裏を決めると，対角線 AC，AD 上に表のコインが偶数枚置かれているような C，D 上へのコインの置き方は 1 通りに決まる。

このとき，対角線 DB，BE 上に表のコインが偶数枚置かれているような B，E 上へのコインの置き方も 1 通りに決まる。こうして置いたとき，対角線 CE 上に表のコインは必ず偶数枚となる。

よって，コインの置き方は，A に置くコインの置き方で決まるから

2 通り

4 ●[文99] 硬貨投げの反復試行. ちょうどn回で終了する確率の最大[2006 数学ＩⅡＡＢ(文理)99]

k を 2 以上の整数とする。硬貨を繰り返し投げて，表の出た回数が k 回になるか，あるいは，裏の出た回数が k 回になった時点で終了する。

(1) $k \leqq n \leqq 2k-1$ を満たす整数 n に対して，ちょうど n 回で終了する確率 p_n を求めよ。

(2) $k \leqq n \leqq 2k-2$ を満たす整数 n に対して，$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}$ を求めよ。

(3) p_n を最大にする n を求めよ。

解説

(1) ちょうど n 回で終了するのは，次のどちらかの場合である。

[1] 1 回目から $(n-1)$ 回目までに表が $(k-1)$ 回，裏が $(n-k)$ 回出て，n 回目に表が出る。

[2] 1 回目から $(n-1)$ 回目までに裏が $(k-1)$ 回，表が $(n-k)$ 回出て，n 回目に裏が出る。

[1]，[2] が起こる確率はどちらも等しく　${}_{n-1}C_{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\times\frac{1}{2}$

よって　$p_n = {}_{n-1}C_{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \dfrac{(n-1)!}{2^{n-1}(k-1)!(n-k)!}$

(2) $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} = \dfrac{n!}{2^n(k-1)!(n+1-k)!} \times \dfrac{2^{n-1}(k-1)!(n-k)!}{(n-1)!} = \dfrac{n}{2(n+1-k)}$

(3) $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} > 1$ とすると　$\dfrac{n}{2(n+1-k)} > 1$

分母を払って　$n > 2n+2-2k$　よって　$n < 2k-2$

したがって，$n < 2k-2$ のとき　$p_n < p_{n+1}$

$n = 2k-2$ のとき　$p_n = p_{n+1}$

ゆえに　$p_k < p_{k+1} < \cdots\cdots < p_{2k-2} = p_{2k-1}$

よって，p_n は $n = 2k-2,\ 2k-1$ のとき最大になる。

$\boxed{5}$ ●[理102]サイコロの目の確率(漸化式利用)[2006 数学ⅠⅡＡＢ(理)102]

正六面体の各面に１つずつ，サイコロのように，１から６までの整数がもれなく書かれていて，向かい合う面の数の和は７である。このような正六面体が底面の数字が１であるように机の上に置かれている。この状態から始めて，次の試行を繰り返し行う。「現在の底面と隣り合う４面のうちの１つを新しい底面にする。」ただし，これらの４面の数字が a_1，a_2，a_3，a_4 のとき，それぞれの面が新しい底面となる確率の比は $a_1:a_2:a_3:a_4$ とする。この試行を n 回繰り返した後，底面の数字が m である確率を $p_n(m)$ $(n\geqq 1)$ で表す。

(1)　$n\geqq 1$ のとき，$q_n=p_n(1)+p_n(6)$，$r_n=p_n(2)+p_n(5)$，$s_n=p_n(3)+p_n(4)$ を求めよ。

(2)　$p_n(m)$ $(n\geqq 1,\ m=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$ を求めよ。

(解説)

(1)　q_n は，n 回の試行後に底面の数字が１または６になる確率である。

$n+1$ 回の試行後に底面の数字が１または６になるのは，n 回の試行後に底面が２，３，４，５のいずれか(このとき側面の４つの数字のうち２つは１，６)で，次の $n+1$ 回目の試行で底面が１または６になるときである。

n 回の試行後に底面が２，３，４，５のいずれかになるのは，底面が１でも６でもない場合であるから，その確率は

$$1-q_n$$

側面の４つの数字の和は常に $7+7=14$ であるから，$n+1$ 回目の試行で底面が１または６になる確率は　$\dfrac{1}{14}+\dfrac{6}{14}=\dfrac{1}{2}$

よって　$q_{n+1}=(1-q_n)\cdot\dfrac{1}{2}$

これを変形すると　$q_{n+1}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(q_n-\dfrac{1}{3}\right)$

また，１回の試行で底面の数字が１または６になることはないから　$q_1=0$

数列 $\left\{q_n-\dfrac{1}{3}\right\}$ は初項 $q_1-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$q_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

したがって　$q_n=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

同様に，r_n は，n 回の試行後に底面の数字が２または５になる確率である。

n 回の試行後に底面の数字が２でも５でもない確率は，$1-r_n$ で，次の $n+1$ 回目の試行で底面の数字が，２または５になる確率は　$\dfrac{2}{14}+\dfrac{5}{14}=\dfrac{1}{2}$

よって　$r_{n+1}=(1-r_n)\cdot\dfrac{1}{2}$

これを変形すると　$r_{n+1}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(r_n-\dfrac{1}{3}\right)$

また　$r_1=p_1(2)+p_1(5)=\dfrac{2}{14}+\dfrac{5}{14}=\dfrac{1}{2}$

数列 $\left\{r_n-\dfrac{1}{3}\right\}$ は初項 $r_1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$r_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

したがって　$r_n=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$

s_n は，r_n とまったく同様で　$s_{n+1}=(1-s_n)\cdot\dfrac{1}{2}$，$s_1=\dfrac{3}{14}+\dfrac{4}{14}=\dfrac{1}{2}$

よって　$s_n=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$

したがって　$q_n=\dfrac{1}{3}\left\{1+2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$，　$r_n=s_n=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$

(2)　$p_n(1)$ は，$n-1$ 回の試行後，底面が２，３，４，５のいずれかで，次の n 回目の試行で底面が１になる確率であるから　(ただし $n\geqq 2$)

$$p_n(1)=(1-q_{n-1})\cdot\frac{1}{14}=\frac{1}{3}\left\{2-2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\cdot\frac{1}{14}$$
$$=\frac{1}{21}\left\{1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$p_1(1)=0$ であるから，これは $n=1$ のときも成り立つ。

同様に，$p_n(2)$ は，$n-1$ 回の試行後，底面が１，３，４，６のいずれかで，次の n 回目の試行で底面が２になる確率であるから

$$p_n(2)=(1-r_{n-1})\cdot\frac{2}{14}=\frac{1}{3}\left\{2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\cdot\frac{1}{7}$$
$$=\frac{2}{21}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$\dfrac{2}{21}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right\}=\dfrac{2}{21}\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{2}{14}=p_1(2)$ であるから，これは $n=1$ のときも成り立つ。

$p_n(3)$ は，$n-1$ 回の試行後，底面が１，２，５，６のいずれかで次の n 回目の試行で底面が３になる確率であるから

$$p_n(3)=(1-s_{n-1})\cdot\frac{3}{14}=\frac{1}{3}\left\{2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\cdot\frac{3}{14}$$
$$=\frac{1}{7}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$\dfrac{1}{7}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right\}=\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{14}=p_1(3)$ であるから，これは $n=1$ のときも成り立つ。

よって　$p_n(4)=s_n-p_n(3)=\dfrac{4}{21}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$

$$p_n(5)=r_n-p_n(2)=\frac{5}{21}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$p_n(6)=q_n-p_n(1)=\frac{2}{7}\left\{1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$\boxed{6}$ ●反復試行の確率と漸化式[2006]

正六面体の各面に１つずつ，サイコロのように，１から６までの整数がもれなく書かれていて，向かい合う面の数の和は７である。このような正六面体が底面の数字が１であるように机の上におかれている。この状態から始めて，次の試行を繰り返し行う。

「現在の底面と隣り合う４面のうちの１つを新しい底面にする。」

ただし，これらの４面の数字が a_1，a_2，a_3，a_4 のとき，それぞれの面が新しい底面となる確率の比は $a_1:a_2:a_3:a_4$ とする。この試行を n 回繰り返した後，底面の数字が m である確率を $p_n(m)$ $(n\geqq 1)$ で表す。$q_n=p_n(1)+p_n(6)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とおく。

(1)　q_1，q_2 を求めよ。　　(2)　q_n を q_{n-1} で表し，q_n を求めよ。

(3)　$p_n(1)$ を求めよ。

(解説)

(1)　１回目の試行後の底面の数字は２，３，４，５のいずれかである。

よって　$p_1(1)=p_1(6)=0$　　ゆえに　$q_1=p_1(1)+p_1(6)=0$

１回目の試行後に底面の数字が何であっても，側面の４つの数字(そのうちの２つは１，６)の和は常に $7+7=14$ であるから

$$p_2(1)=1\times\frac{1}{14}=\frac{1}{14},\quad p_2(6)=1\times\frac{6}{14}=\frac{6}{14}$$

よって　$q_2=p_2(1)+p_2(6)=\dfrac{1}{14}+\dfrac{6}{14}=\dfrac{7}{14}=\dfrac{1}{2}$

(2)　q_n は，n 回の試行後に底面の数字が１または６になる確率である。

n 回の試行後に底面の数字が１または６になるのは，$(n-1)$ 回の試行後に底面が２，３，４，５のいずれかで，次の n 回目の試行で底面が１または６になるときである。

$(n-1)$ 回の試行後に底面が２，３，４，５のいずれかになる確率は　$1-q_{n-1}$

n 回目の試行で底面が１または６になる確率は　$\dfrac{1}{14}+\dfrac{6}{14}=\dfrac{1}{2}$

よって　$q_n=(1-q_{n-1})\times\dfrac{1}{2}$　　ゆえに　$q_n=-\dfrac{1}{2}q_{n-1}+\dfrac{1}{2}$ $(n\geqq 2)$ ……①

① を変形すると　$q_n-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(q_{n-1}-\dfrac{1}{3}\right)$ $(n\geqq 2)$

よって，数列 $\left\{q_n-\dfrac{1}{3}\right\}$ は，初項 $q_1-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$q_n-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　　よって　$q_n=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

ここで，$n=1$ とすると $q_1=\dfrac{1}{3}(1-1)=0$ となり，$n=1$ のときも成り立つ。

(3)　n 回の試行後に底面が１になるのは，$(n-1)$ 回の試行後に底面が２，３，４，５のいずれかで，次の n 回目の試行で底面が１になるときである。

よって，$n\geqq 2$ のとき　$p_n(1)=(1-q_{n-1})\times\dfrac{1}{14}$

$$=\frac{1}{14}\left[1-\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}\right]$$
$$=\frac{1}{21}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

ここで，$n=1$ とすると $p_1(1)=\dfrac{1}{21}(1-1)=0$ となり，$n=1$ のときも成り立つ。

7 ●[理108]Qがx=a, y=aに達するまでコインを投げる回数の期待値[2006 数学ⅠⅡAB(理)108]

コインを投げた結果に基づき xy 平面上の点 Q$(x,\ y)$ を動かすものとする。最初，点 Q は原点にあり，コインを投げて表が出れば x 座標を 1 増加させ，裏が出れば y 座標を 1 増加させる。点 Q が直線 $x=a$ あるいは直線 $y=a$ のいずれかの上に達するまでこの試行を繰り返す。ただし，a は正の整数であり，コインの表と裏の出る確率は等しいものとする。

(1)　コインを投げる回数 N の最小値 K と最大値 L を a を用いて表せ。

(2)　$a=3$ のとき，コインを投げる回数 N が 4 である確率を求めよ。

(3)　任意の a に対して，コインを投げる回数 N が n $(K\leqq n\leqq L)$ である確率を求めよ。

(4)　(3) で求めた確率を p_n とする。$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}$ を求めよ。ただし，$K\leqq n\leqq L-1$ とする。

(5)　(4) の結果を利用し，コインを投げる回数 N の期待値を a を用いて表せ。

解説

(1)　N が最小になるのは，点 $(a,\ 0)$ または $(0,\ a)$ に達するときであるから

$$K=a$$

N が最大になるのは，点 $(a-1,\ a)$ または $(a,\ a-1)$ に達するときであるから

$$L=2a-1$$

(2)　$N=4$ となるのは，次の [1]，[2] のどちらかである。

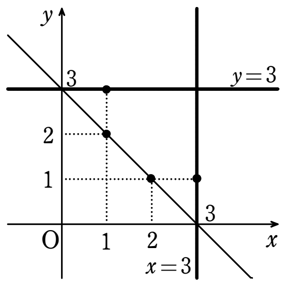
[1]　点 $(2,\ 1)$ から点 $(3,\ 1)$ に達するとき

確率は　${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{16}$

[2]　点 $(1,\ 2)$ から点 $(1,\ 3)$ に達するとき

確率は　${}_3\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{16}$

よって，求める確率は　$\dfrac{3}{16}+\dfrac{3}{16}=\dfrac{3}{8}$



(3)　$N=n$ となるのは，次の [1]，[2] のどちらかである。

[1]　点 $(a-1,\ n-a)$ から $(a,\ n-a)$ に達するとき

確率は　${}_{n-1}\mathrm{C}_{a-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\times\dfrac{1}{2}={}_{n-1}\mathrm{C}_{a-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$

[2]　点 $(n-a,\ a-1)$ から $(n-a,\ a)$ に達するとき

確率は　${}_{n-1}\mathrm{C}_{n-a}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\times\dfrac{1}{2}={}_{n-1}\mathrm{C}_{a-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$

よって，求める確率は　$2\times{}_{n-1}\mathrm{C}_{a-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}=\dfrac{(n-1)!}{2^{n-1}(a-1)!(n-a)!}$

(4)　$p_n=\dfrac{(n-1)!}{2^{n-1}(a-1)!(n-a)!}$ であるから

$$\frac{p_{n+1}}{p_n}=\frac{n!}{2^n(a-1)!(n+1-a)!}\cdot\frac{2^{n-1}(a-1)!(n-a)!}{(n-1)!}=\frac{n}{2(n+1-a)}$$

(5)　$a\leqq n\leqq 2a-2$ のとき，$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}=\dfrac{n}{2(n+1-a)}$ から

$$np_n=2(n+1)p_{n+1}-2ap_{n+1}$$

N の期待値を $E(N)$ とすると　$E(N)=\displaystyle\sum_{n=a}^{2a-1}np_n$

$a\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}E(N)&=\sum_{n=a}^{2a-1}np_n\\&=\sum_{n=a}^{2a-2}\{2(n+1)p_{n+1}-2ap_{n+1}\}+(2a-1)p_{2a-1}\\&=2\{(a+1)p_{a+1}+\cdots\cdots+(2a-1)p_{2a-1}\}\\&\quad-2a(p_{a+1}+\cdots\cdots+p_{2a-1})+(2a-1)p_{2a-1}\\&=2\{E(N)-ap_a\}-2a(1-p_a)+(2a-1)p_{2a-1}\\&=2E(N)-2a+(2a-1)p_{2a-1}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}E(N)&=2a-(2a-1)p_{2a-1}\\&=2a-(2a-1)\times\frac{(2a-2)!}{\{(a-1)!\}^2 2^{2a-2}}\\&=2a-\frac{(2a-1)!}{2^{2a-2}\{(a-1)!\}^2}\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

$a=1$ のとき　$E(N)=1$

① において，$a=1$ とすると $2\cdot1-1=1$ であるから，① は $a=1$ のときも成り立つ。

したがって，求める期待値は　$2a-\dfrac{(2a-1)!}{2^{2a-2}\{(a-1)!\}^2}$

8 ●2本のピッタリ直線が直交するような点Pの存在範囲[2006]

xy 平面上に点 A$(2,\ 4)$ がある。平面上の直線 ℓ に関して点 A と対称な点が x 軸上にあるとき，直線 ℓ をピッタリ直線と呼ぶことにする。

(1)　点 P$(p,\ q)$ を通るピッタリ直線 ℓ があるとし，ℓ に関して A と対称な点を A′$(t,\ 0)$ とするとき，$p,\ q,\ t$ の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2)　ピッタリ直線が 2 本通る点 P$(p,\ q)$ の存在範囲を求め，それを図示せよ。

(3)　点 P$(p,\ q)$ を通る 2 本のピッタリ直線が直交するような点 P$(p,\ q)$ の存在範囲を求め，それを図示せよ。

解説

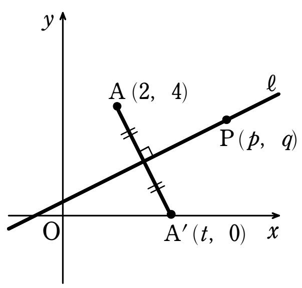
(1)　直線 ℓ は線分 AA′ の垂直二等分線である。

点 P が ℓ 上にあるから AP=A′P より

$$\mathrm{AP}^2=\mathrm{A'P}^2$$

よって　$(p-2)^2+(q-4)^2=(p-t)^2+q^2$　すなわち

$$t^2-2pt+4p+8q-20=0\quad\cdots\cdots①$$



(2)　題意を満たすのは，t についての 2 次方程式 ① が異なる 2 つの実数解をもてばよい。

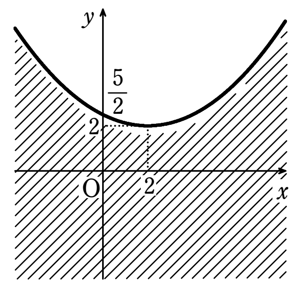
① の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=p^2-(4p+8q-20)>0$$

整理して　$q<\dfrac{1}{8}(p-2)^2+2$

よって，点 P の存在範囲は放物線 $y=\dfrac{1}{8}(x-2)^2+2$ の下側の部分で，右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含まない。



(3)　① の異なる 2 つの実数解を $t_1,\ t_2$ とすると，

解と係数の関係から

$$t_1+t_2=2p,\ t_1t_2=4p+8q-20\quad\cdots\cdots②$$

① から，ピッタリ直線の方程式は

$$t^2-2xt+4x+8y-20=0$$

よって，ピッタリ直線の傾きは　$\dfrac{t-2}{4}$

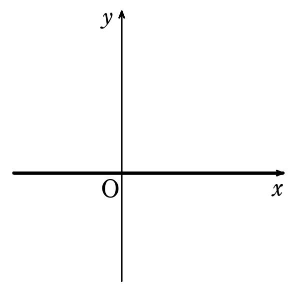
2 本のピッタリ直線が直交することから

$$\frac{t_1-2}{4}\times\frac{t_2-2}{4}=-1$$

整理して　$t_1t_2-2(t_1+t_2)+20=0$

② を代入して　$(4p+8q-20)-2\cdot2p+20=0$　したがって　$q=0$

よって，点 P の存在範囲は直線 $y=0$ で，図の太線部分である。



$\boxed{9}$ ●2本のピッタリ直線が直交するような点Pの存在範囲［2006］

座標平面上に3点O$(0,\ 0)$，A$(4,\ 2)$，B$(6,\ 0)$を考える。平面上の直線ℓに関して点Aと対称な点が線分OB上にあるとき，直線ℓをピッタリ直線と呼ぶことにする。

(1)　点P$(p,\ q)$を通るピッタリ直線ℓがあるとし，ℓに関してAと対称な点をA$'(t,\ 0)$ $(0\leqq t\leqq 6)$とするとき，$p,\ q,\ t$の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2)　ピッタリ直線が2本通る点P$(p,\ q)$の存在範囲を求め，それを図示せよ。図には三角形OABも書いておくこと。

(3)　点P$(p,\ q)$を通る2本のピッタリ直線が直交するような点P$(p,\ q)$の存在範囲を求め，それを図示せよ。

解説

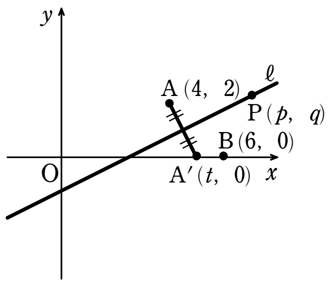
(1)　直線ℓは線分AA$'$の垂直二等分線である。

点Pがℓ上にあるから　AP$=$A$'$P より

$$\mathrm{AP}^2=\mathrm{A'P}^2$$

よって　$(p-4)^2+(q-2)^2=(p-t)^2+q^2$

すなわち　$t^2-2pt+8p+4q-20=0$　……①



(2)　題意を満たすのは，tについての2次方程式①が$0\leqq t\leqq 6$の範囲に異なる2つの実数解をもてばよい。

ここで　$f(t)=t^2-2pt+8p+4q-20$

$\qquad\quad =(t-p)^2-p^2+8p+4q-20$

とおくと

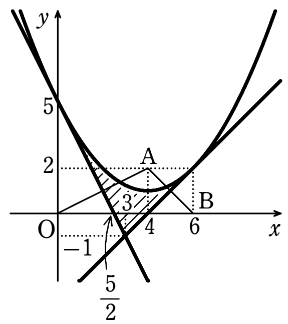
求める条件は
$$\begin{cases} f(p)=-p^2+8p+4q-20<0 \\ 0<p<6 \\ f(0)=8p+4q-20\geqq 0 \\ f(6)=-4p+4q+16\geqq 0 \end{cases}$$

整理して　$q<\dfrac{1}{4}(p-4)^2+1$，$0<p<6$，$q\geqq -2p+5$，$q\geqq p-4$

よって，点Pの存在範囲は4つの不等式 $y<\dfrac{1}{4}(x-4)^2+1$，$0<x<6$，

$y\geqq -2x+5$，$y\geqq x-4$ が表す各領域の共通部分で，図の斜線部分である。

ただし，境界線は2直線を含み，放物線は含まない。



(3)　①の異なる2つの実数解をt_1，t_2とすると

解と係数の関係から　　$t_1+t_2=2p$，$t_1t_2=8p+4q-20$　……②

①から，ピッタリ直線の方程式は　　$t^2-2xt+8x+4y-20=0$

よって，ピッタリ直線の傾きは　　$\dfrac{t-4}{2}$

2本のピッタリ直線が直交することから

$$\frac{t_1-4}{2}\times\frac{t_2-4}{2}=-1$$

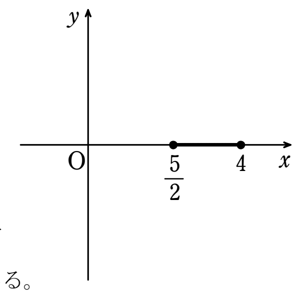
整理して　　$t_1t_2-4(t_1+t_2)+20=0$

これに②を代入して

$$(8p+4q-20)-4\cdot 2p+20=0$$

よって　$q=0$

ゆえに，点Pの存在範囲は，(2)の領域との共通部分を考えて，線分 $y=0\ \left(\dfrac{5}{2}\leqq x\leqq 4\right)$ で，図の太線部分である。



$\boxed{10}$ ●［文225］連立不等式の表す領域D, E, F. D∪(E∩F)の面積の最小値［2006 数学ⅠⅡAB（文理）225］

$0\leqq k\leqq 1$を満たす実数kに対して，xy平面上に次の連立不等式で表される3つの領域D，E，Fを考える。

Dは連立不等式 $y\geqq x^2$，$y\leqq kx$ で表される領域

Eは連立不等式 $y\leqq x^2$，$y\geqq kx$ で表される領域

Fは連立不等式 $y\leqq -x^2+2x$，$y\geqq kx$ で表される領域

(1)　領域$D\cup(E\cap F)$の面積$m(k)$を求めよ。

(2)　(1)で求めた面積$m(k)$を最小にするkの値と，その最小値を求めよ。

解説

(1)　$y=x^2$ ……①，$y=kx$ ……②，

$y=-x^2+2x$ ……③　とする。

①と②の共有点のx座標は，$x^2=kx$を解いて

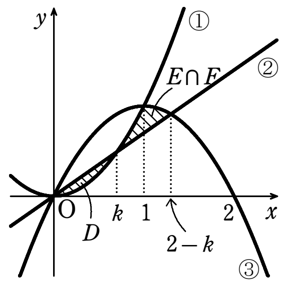
$\qquad x=0,\ k$

②と③の共有点のx座標は，$kx=-x^2+2x$を解いて

$\qquad x=0,\ 2-k$

①と③の共有点のx座標は，$x^2=-x^2+2x$を解いて

$\qquad x=0,\ 1$



領域$D\cup(E\cap F)$は図の斜線部分であるから

$$m(k)=\int_0^k(kx-x^2)dx+\int_k^1(x^2-kx)dx+\int_1^{2-k}(-x^2+2x-kx)dx$$

$$=\left[\frac{k}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^k+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{k}{2}x^2\right]_k^1+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{2-k}{2}x^2\right]_1^{2-k}$$

$$=\frac{k^3}{6}+\left(\frac{k^3}{6}-\frac{k}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{k^3}{6}+k^2-\frac{3}{2}k+\frac{2}{3}\right)=\frac{k^3}{6}+k^2-2k+1$$

(2)　$m'(k)=\dfrac{k^2}{2}+2k-2=\dfrac{1}{2}(k^2+4k-4)$

$m'(k)=0$ とすると

$\qquad k=-2\pm 2\sqrt{2}$

$0\leqq k\leqq 1$における$m(k)$の増減表は右のようになる。

k	0	$\cdots$	$-2+2\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$m'(k)$		$-$	0	$+$	
$m(k)$		↘	極小	↗	

よって，$m(k)$を最小にするkの値は

$$k=-2+2\sqrt{2}$$

また，$m(k)=\dfrac{1}{6}(k^2+4k-4)(k+2)-\dfrac{8}{3}k+\dfrac{7}{3}$ であるから，$m(k)$の最小値は

$$m(-2+2\sqrt{2})=-\frac{8}{3}(-2+2\sqrt{2})+\frac{7}{3}=\frac{23-16\sqrt{2}}{3}$$

$\boxed{11}$ ●曲線上の2接線のなす角をαとするとき$\tan\alpha$の最大値[2006]

媒介変数 θ_1 および θ_2 で表される 2 つの曲線

$$C_1:\begin{cases}x=\cos\theta_1\\ y=\sin\theta_1\end{cases}\left(0<\theta_1<\frac{\pi}{2}\right)\qquad C_2:\begin{cases}x=\cos\theta_2\\ y=3\sin\theta_2\end{cases}\left(-\frac{\pi}{2}<\theta_2<0\right)$$

がある。

C_1 上の点 P_1 と C_2 上の点 P_2 が，$\theta_1=\theta_2+\dfrac{\pi}{2}$ の関係を保って移動する。

曲線 C_1 の点 P_1 における接線と，曲線 C_2 の点 P_2 における接線の交点を P とし，これら 2 つの接線のなす角 $\angle\mathrm{P}_1\mathrm{P}\mathrm{P}_2$ を α とする。

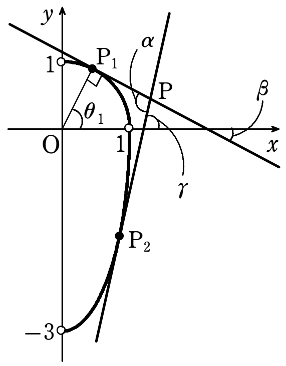
(1)　直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}$ と x 軸とのなす角を β $\left(0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$，直線 $\mathrm{P}_2\mathrm{P}$ と x 軸とのなす角を γ $\left(0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。$\tan\beta$ および $\tan\gamma$ を θ_1 で表せ。

(2)　$\tan\alpha$ を θ_1 で表せ。

(3)　$\tan\alpha$ の最大値と，最大値を与える θ_1 を求めよ。

(解説)

(1)　曲線 C_1 は円 $x^2+y^2=1$ の第 1 象限の部分であり，右の図から



$$\tan\beta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)=\frac{1}{\tan\theta_1}$$

曲線 C_2 は楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$ の第 3 象限の部分であり，

点 P_2 における接線の方程式は $x\cos\theta_2+\dfrac{y}{3}\sin\theta_2=1$

である。

よって　$$\tan\gamma=-\frac{3\cos\theta_2}{\sin\theta_2}=-\frac{3}{\tan\theta_2}$$

$$=-\frac{3}{\tan\left(\theta_1-\dfrac{\pi}{2}\right)}=3\tan\theta_1$$

(2)　$$\tan\alpha=\tan(\beta+\gamma)=\frac{\tan\beta+\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma}=\frac{\dfrac{1}{\tan\theta_1}+3\tan\theta_1}{1-\dfrac{1}{\tan\theta_1}\cdot3\tan\theta_1}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(3\tan\theta_1+\frac{1}{\tan\theta_1}\right)$$

(3)　$\tan\theta_1>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$3\tan\theta_1+\frac{1}{\tan\theta_1}\geqq2\sqrt{3\tan\theta_1\cdot\frac{1}{\tan\theta_1}}=2\sqrt{3}$$

等号は $3\tan\theta_1=\dfrac{1}{\tan\theta_1}$ すなわち $\theta_1=\dfrac{\pi}{6}$ のとき成り立つ。

したがって，$-\dfrac{1}{2}\left(3\tan\theta_1+\dfrac{1}{\tan\theta_1}\right)\leqq-\sqrt{3}$ より，$\tan\alpha$ は $\theta_1=\dfrac{\pi}{6}$ のとき最大値 $-\sqrt{3}$ をとる。

$\boxed{12}$ ●2つの線分と曲線で囲まれる部分の面積Snの無限級数の和[2006]

xy 平面上に曲線 C：$y=\log x$ $(x>0)$ を考える。

(1)　曲線 C の接線で点 $(0,\ b)$ を通るものの方程式を求めよ。

(2)　平面上に 2 組の点列 $\{\mathrm{A}_n\}$，$\{\mathrm{B}_n\}$ を次のように定める。A_1 を $(1,\ 0)$ とする。A_n が定まったとき，A_n を通り x 軸に平行な直線と y 軸との交点を B_n とし，B_n を通る曲線 C の接線の接点を A_{n+1} とする。このとき，2 つの線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ と $\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}$ および曲線 C とで囲まれる部分の面積 S_n を求めよ。

(3)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{S_n}$ の和を求めよ。ここで，$|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ であることを用いてよい。

(解説)

(1)　$y=\log x$ より $y'=\dfrac{1}{x}$ であるから，C 上の点 $(t,\ \log t)$ における接線の方程式は

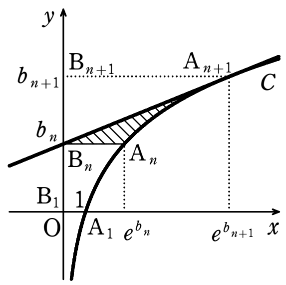
$$y-\log t=\frac{1}{t}(x-t)\quad すなわち\quad y=\frac{1}{t}x-1+\log t$$

これが点 $(0,\ b)$ を通るから　$b=-1+\log t$

よって　$\log t=b+1$　　ゆえに　$t=e^{b+1}$　……①

したがって，求める接線の方程式は　$y=\dfrac{1}{e^{b+1}}x+b$

(2)　B_n の y 座標を b_n とおくと，$b_1=0$ であり



$\mathrm{B}_n(0,\ b_n)$，$\mathrm{A}_n\left(e^{b_n},\ b_n\right)$，$\mathrm{A}_{n+1}\left(e^{b_{n+1}},\ b_{n+1}\right)$

C 上の点 A_{n+1} における接線が点 B_n を通るから，

① で $t\longrightarrow e^{b_{n+1}}$，$b\longrightarrow b_n$ とおき換えて

$e^{b_{n+1}}=e^{b_n+1}$　　すなわち　$b_{n+1}=b_n+1$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=0$，公差 1 の等差数列

であるから　$b_n=n-1$

ゆえに　$\mathrm{B}_n(0,\ n-1)$，$\mathrm{B}_{n+1}(0,\ n)$，$\mathrm{A}_{n+1}(e^n,\ n)$

C：$y=\log x$ より $x=e^y$ であるから

$$S_n=\int_{n-1}^{n}e^y\,dy-\triangle\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}=\Big[e^y\Big]_{n-1}^{n}-\frac{1}{2}\cdot1\cdot e^n$$

$$=e^n-e^{n-1}-\frac{1}{2}e^n=\frac{e-2}{2}e^{n-1}$$

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{S_n}=\frac{2}{e-2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{n-1}}$　　ここで $\displaystyle T_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{e^{n-1}}$ とおく。

$$T_N=1+\frac{2}{e}+\frac{3}{e^2}+\cdots\cdots+\frac{N}{e^{N-1}}$$

$$\frac{1}{e}T_N=\qquad\frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}+\cdots\cdots+\frac{N-1}{e^{N-1}}+\frac{N}{e^N}$$

辺々を引いて

$$\left(1-\frac{1}{e}\right)T_N=1+\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{e^{N-1}}-\frac{N}{e^N}=\frac{1-\left(\dfrac{1}{e}\right)^N}{1-\dfrac{1}{e}}-\frac{N}{e^N}$$

よって　$$T_N=\left(\frac{e}{e-1}\right)^2\left\{1-\left(\frac{1}{e}\right)^N\right\}-\frac{e}{e-1}\cdot N\left(\frac{1}{e}\right)^N$$

$0<\dfrac{1}{e}<1$ より $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^N=0$，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}N\left(\frac{1}{e}\right)^N=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{N\to\infty}T_N=\left(\frac{e}{e-1}\right)^2$

したがって　$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{S_n}=\frac{2}{e-2}\lim_{N\to\infty}T_N=\frac{2}{e-2}\left(\frac{e}{e-1}\right)^2=\frac{2e^2}{(e-2)(e-1)^2}$$

13 ●[3C191]頂点が座標軸上を動く三角形. z軸回転した体積の最小[2006 数学ⅢＣ191]

空間内の点 O，A，B，C の座標をそれぞれ $(0,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$ とする。点 P は x 軸上を点 O から点 A へ向かって，点 Q は y 軸上を点 B から点 O へ向かって，それぞれ時刻 $t=0$ に出発して速さ 1 で移動する。時刻 $t\ (0\leqq t\leqq 1)$ において，三角形 CPQ を z 軸の周りに回転させてできる立体を考える。

(1)　時刻 t において，xy 平面上の線分 PQ を，原点を中心にして xy 平面上で 1 回転させたときに，線分が通過する部分の図形の面積を求めよ。

(2)　時刻 t において，立体を平面 $z=u\ (0\leqq u\leqq 1)$ で切ったときの断面積 $S(u)$ を求め，立体の体積 $V(t)$ を求めよ。

(3)　$V(t)$ の最小値と，最小値を与える t を求めよ。

解説

(1)　点 P の座標は　$(t,\ 0,\ 0)$，　点 Q の座標は　$(0,\ 1-t,\ 0)$

ゆえに，xy 平面上における直線 PQ の方程式は

$$\frac{x}{t}+\frac{y}{1-t}=1 \qquad \text{すなわち}\quad (1-t)x+ty-t(1-t)=0$$

直線 PQ と原点の距離 d は　$d=\dfrac{|-t(1-t)|}{\sqrt{(1-t)^2+t^2}}$

また，線分 PQ 上の点で，原点から最も遠い点は P または Q であり，その長さは

$0\leqq t\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき　$\mathrm{OQ}=1-t$，　$\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1$ のとき　$\mathrm{OP}=t$

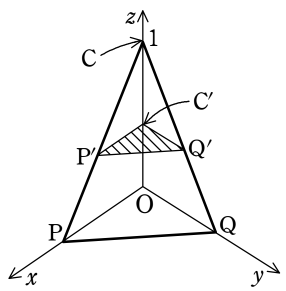
求める面積を S_1 とすると

[1]　$0\leqq t\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

$$S_1=\pi(\mathrm{OQ}^2-d^2)=\pi\left\{(1-t)^2-\frac{t^2(1-t)^2}{2t^2-2t+1}\right\}$$
$$=\frac{(1-t)^2(2t^2-2t+1-t^2)}{2t^2-2t+1}\pi=\frac{(t-1)^4}{2t^2-2t+1}\pi$$

[2]　$\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1$ のとき

$$S_1=\pi(\mathrm{OP}^2-d^2)=\pi\left\{t^2-\frac{t^2(1-t)^2}{2t^2-2t+1}\right\}$$
$$=\frac{t^2\{2t^2-2t+1-(1-t)^2\}}{2t^2-2t+1}\pi$$
$$=\frac{t^4}{2t^2-2t+1}\pi$$



(2)　図のように，四面体 OPQC と平面 $z=u$ が交わってできる三角形の頂点を P′，Q′，C′ とする。

△C′P′Q′∽△OPQ であり，その相似比は，

C′C : OC に等しいから　　$(1-u):1$

回転体を，平面 $z=u\ (0<u<1)$ で切ったときにできる切断面と，平面 $z=0$ で切ったときにできる切断面は相似であり，その相似比は $(1-u):1$ であるから，面積比は

$(1-u)^2:1$

[1]　$0\leqq t\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき　　$S(u)=\dfrac{(t-1)^4}{2t^2-2t+1}\pi\cdot(1-u)^2$

よって　　$V(t)=\displaystyle\int_0^1 S(u)\,du=\frac{(t-1)^4}{2t^2-2t+1}\pi\int_0^1(1-u)^2du$

$$=\frac{(t-1)^4}{2t^2-2t+1}\pi\left[-\frac{(1-u)^3}{3}\right]_0^1=\frac{(t-1)^4}{3(2t^2-2t+1)}\pi$$

[2]　$\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1$ のとき　　$S(u)=\dfrac{t^4}{2t^2-2t+1}\pi\cdot(1-u)^2$

[1] と同様にして　　$V(t)=\dfrac{t^4}{3(2t^2-2t+1)}\pi$

注意　得られる立体は，高さが 1 で底面が半径 OP または OQ の円錐から，高さが 1 で底面が半径 d の円錐をくり抜いたものであるから，その体積は，(1) の結果を利用して，直ちに求めることができる。

[1]　$0\leqq t\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき　$V(t)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{(t-1)^4}{2t^2-2t+1}\pi\cdot 1$

[2]　$\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1$ のとき　$V(t)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{t^4}{2t^2-2t+1}\pi\cdot 1$

(3)　[1]　$0\leqq t\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

$$V'(t)=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{4(t-1)^3(2t^2-2t+1)-(t-1)^4(4t-2)}{(2t^2-2t+1)^2}$$
$$=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{(t-1)^3(2t^2-t+1)}{(2t^2-2t+1)^2}=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{(t-1)^3\left\{2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}\right\}}{(2t^2-2t+1)^2}$$

よって　　$V'(t)<0$

[2]　$\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1$ のとき

$$V'(t)=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{4t^3(2t^2-2t+1)-t^4(4t-2)}{(2t^2-2t+1)^2}=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{t^3(2t^2-3t+2)}{(2t^2-2t+1)^2}$$
$$=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{t^3\left\{2\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}\right\}}{(2t^2-2t+1)^2}$$

よって　　$V'(t)>0$

$0\leqq t\leqq 1$ における $V(t)$ の増減表は右のようになる。

t	0	…	$\frac{1}{2}$	…	1
$V'(t)$		−		+	
$V(t)$		↘	極小	↗	

よって，$V(t)$ は $t=\dfrac{1}{2}$ のとき最小となり，最小値は

$$V\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{24}$$

14 ○曲線と直線が囲む部分をy軸回転した体積[2006]

a を正の定数として，xy 平面内の曲線 $C:y=e^{ax}$ を考える。

(1)　曲線 C に原点から引いた接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2)　曲線 C，直線 ℓ および y 軸で囲まれた部分を，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

解説

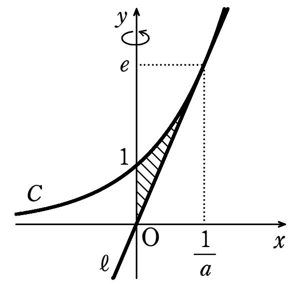
(1)　$y=e^{ax}$ から　　$y'=ae^{ax}$

点 $(t,\ e^{at})$ における曲線 C の接線の方程式は　　$y-e^{at}=ae^{at}(x-t)$

これが原点 $(0,\ 0)$ を通るとき　　$-e^{at}=ae^{at}\cdot(-t)$

$e^{at}\neq 0$ であるから　　$t=\dfrac{1}{a}$

よって，接線 ℓ の方程式は　　$y-e=ae\left(x-\dfrac{1}{a}\right)$　すなわち　$y=aex$



(2)　曲線 C，直線 ℓ および y 軸で囲まれた部分は，右の図の斜線部分である。

また，$y=e^{ax}$ より　　$x=\dfrac{1}{a}\log y$

求める回転体の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{a}\right)^2e-\pi\int_1^e x^2dy=\frac{e\pi}{3a^2}-\frac{\pi}{a^2}\int_1^e(\log y)^2dy$$

ここで

$$\int_1^e(\log y)^2dy=\Big[y(\log y)^2\Big]_1^e-\int_1^e y\cdot 2\log y\cdot\frac{1}{y}dy$$
$$=e-2\Big[y\log y-y\Big]_1^e=e-2$$

よって　　$V=\dfrac{e\pi}{3a^2}-\dfrac{\pi}{a^2}(e-2)=\dfrac{2(3-e)}{3a^2}\pi$

15 ●A町の人口an, B町の人口bnとしたとき, an/bnの極限[2006]

A，B 2つの町がある。毎年1月1日に，A町の前年の住民のうち4割がB町に，B町の前年の住民のうち2割がA町に，それぞれ引っ越す(住民の数は十分多く，引っ越す住民の割合は正確に4割，2割と見なしてよい)。それ以外には住民の移動はなく，A町，B町両方をあわせた住民の数は不変である。

(1)　ある年の末にA町とB町それぞれに住んでいる住民の数を a_0，b_0 とする。1年後にA町とB町それぞれに住んでいる住民の数 a_1，b_1 を表す式を $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}=M\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ とおくとき，2×2 の行列 M を具体的に示せ。

(2)　以下の式を満足する実数 α，β の値を求めよ。ただし，E は 2×2 の単位行列である。

$$M(M-\alpha E)=\beta(M-\alpha E)$$

(3)　(2)で与えられた式は，α と β を入れ換えても成り立つ。このことと(2)の結果を用いて M^n を求めよ。ただし，n は正の整数とする。

(4)　n 年後にA町とB町それぞれに住んでいる住民の数を a_n と b_n とで表す。このとき，次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$$

解説

(1)　$a_1=\dfrac{3}{5}a_0+\dfrac{1}{5}b_0$，$b_1=\dfrac{2}{5}a_0+\dfrac{4}{5}b_0$ であるから

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}\qquad\text{よって}\quad M=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(2)　ハミルトン・ケーリーの定理により　$M^2-\dfrac{7}{5}M+\dfrac{2}{5}E=O$　……①

また，$M(M-\alpha E)=\beta(M-\alpha E)$ から　$M^2-(\alpha+\beta)M+\alpha\beta E=O$　……②

①−② から　$\left(\alpha+\beta-\dfrac{7}{5}\right)M+\left(\dfrac{2}{5}-\alpha\beta\right)E=O$

$M\fallingdotseq kE$ (k は実数) であるから　$\alpha+\beta=\dfrac{7}{5}$，$\alpha\beta=\dfrac{2}{5}$

よって，α，β は2次方程式 $x^2-\dfrac{7}{5}x+\dfrac{2}{5}=0$ の2つの解である。

$5x^2-7x+2=0$ から　$(x-1)(5x-2)=0$　　よって　$x=1,\ \dfrac{2}{5}$

したがって　$\alpha=1$，$\beta=\dfrac{2}{5}$ または $\alpha=\dfrac{2}{5}$，$\beta=1$

(3)　(2)より　$M(M-E)=\dfrac{2}{5}(M-E)$，$M\left(M-\dfrac{2}{5}E\right)=M-\dfrac{2}{5}E$

よって　$M^n(M-E)=\left(\dfrac{2}{5}\right)^n(M-E)$，$M^n\left(M-\dfrac{2}{5}E\right)=M-\dfrac{2}{5}E$

すなわち　$M^{n+1}-M^n=\left(\dfrac{2}{5}\right)^n(M-E)$，$M^{n+1}-\dfrac{2}{5}M^n=M-\dfrac{2}{5}E$

M^{n+1} を消去すると　$\dfrac{3}{5}M^n=M-\dfrac{2}{5}E-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n(M-E)$

ゆえに　$M^n=\dfrac{1}{3}(5M-2E)-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n(5M-5E)$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n & \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n \\ \dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n & \dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n \end{pmatrix}$$

(4)　$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}=M^n\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ となることと，(3)の結果から

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left[\left\{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}a_0+\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}b_0\right]=\frac{1}{3}(a_0+b_0)$$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left[\left\{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}a_0+\left\{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}b_0\right]=\frac{2}{3}(a_0+b_0)$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n}{\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n}=\frac{a_0+b_0}{2(a_0+b_0)}=\frac{1}{2}$

$\boxed{16}$ ●直線に移される点の像［2006］

s を実数とする。$(u_1,\ v_1)=(s,\ 1)$ とし，$(u_n,\ v_n)$ $(n\geqq 2)$ を次の漸化式で定める。

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

s が実数全体を動くとき，$(u_n,\ v_n)$ が描く xy 平面上の図形を ℓ_n とする。

(1)　図形 ℓ_n $(n\geqq 1)$ の方程式を求めよ。

(2)　ℓ_{2k-1} (k は正の整数) と y 軸との交点を中心とし，ℓ_{2k} に接する円の方程式を求めよ。

解説

(1)　$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。

$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$ $(n\geqq 2)$ であるから

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix} u_{n-2} \\ v_{n-2} \end{pmatrix}=\cdots\cdots=A^{n-1}\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

よって　$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ $(n\geqq 1)$　（ただし，$A^0=E$ とする）

ここで，$A^2=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}=-3E$ であるから，自然数 k に対して

$$A^{2k-1}=(-3)^{k-1}A,\ A^{2k}=(-3)^kE$$

［1］　$n=2k-1$ のとき

$$\begin{pmatrix} u_{2k-1} \\ v_{2k-1} \end{pmatrix}=A^{2k-2}\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}=(-3)^{k-1}E\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}=(-3)^{k-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix}=(-3)^{k-1}\begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって　$u_{2k-1}=(-3)^{k-1}\cdot s$，$v_{2k-1}=(-3)^{k-1}$

s が実数全体を動くとき，u_{2k-1} も実数全体を動くから，図形 ℓ_n の方程式は

$$y=(-3)^{k-1}\quad すなわち\quad y=(-3)^{\frac{n-1}{2}}$$

［2］　$n=2k$ のとき

$$\begin{pmatrix} u_{2k} \\ v_{2k} \end{pmatrix}=A^{2k-1}\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}=(-3)^{k-1}A\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}=(-3)^{k-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix}=(-3)^{k-1}\begin{pmatrix} s-2 \\ 2s-1 \end{pmatrix}$$

よって　$u_{2k}=(-3)^{k-1}(s-2)$，$v_{2k}=(-3)^{k-1}(2s-1)$

s を消去して　$2u_{2k}-v_{2k}=-3\cdot(-3)^{k-1}$

すなわち　$2u_{2k}-v_{2k}=(-3)^k$

s が実数全体を動くとき，u_{2k} も実数全体を動くから，図形 ℓ_n の方程式は

$$2x-y=(-3)^k\quad すなわち\quad 2x-y=(-3)^{\frac{n}{2}}$$

以上のことから，図形 ℓ_n $(n\geqq 1)$ の方程式は

$$n\ が奇数のとき\quad y=(-3)^{\frac{n-1}{2}},\ n\ が偶数のとき\quad 2x-y=(-3)^{\frac{n}{2}}$$

(2)　(1) より ℓ_{2k-1} : $y=(-3)^{k-1}$ であるから，求める円の中心は　$(0,\ (-3)^{k-1})$

半径は点 $(0,\ (-3)^{k-1})$ と ℓ_{2k} : $2x-y=(-3)^k$ の距離であるから

$$\frac{|2\cdot 0-(-3)^{k-1}-(-3)^k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2\cdot 3^{k-1}}{\sqrt{5}}$$

よって，求める円の方程式は　$x^2+\{y-(-3)^{k-1}\}^2=\dfrac{4\cdot 9^{k-1}}{5}$