名古屋大学　2007年度入試問題

1 ●[理101]N回後に赤m個の確率pN(m)(1)p3(1):p3(2):p3(3):p3(4)[2007 数学ⅠⅡAB(理)101]

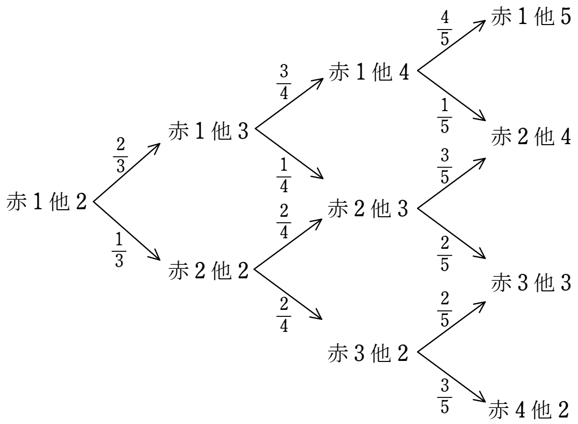
袋の中に赤と黄と青の玉が1個ずつ入っている。「この袋から玉を1個取り出して戻し，出た玉と同じ色の玉を袋の中に1個追加する」という操作を N 回繰り返した後，赤の玉が袋の中に m 個ある確率を $p_N(m)$ とする。

(1)　連比 $p_3(1):p_3(2):p_3(3):p_3(4)$ を求めよ。

(2)　一般の N に対し $p_N(m)$ $(1 \leqq m \leqq N+1)$ を求めよ。

解説

(1)　操作を3回繰り返したとき，袋の中の玉の個数の推移は，次の図のようになる。



$p_3(m)$ は，操作を3回繰り返した後，袋の中に赤の玉が m 個 $(1 \leqq m \leqq 4)$ ある確率であるから，図より

$$p_3(1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 4}{4\cdot 5}$$

$$p_3(2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2\cdot 3}{4\cdot 5}$$

$$p_3(3)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 2}{4\cdot 5}$$

$$p_3(4)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2\cdot 1}{4\cdot 5}$$

よって　　$p_3(1):p_3(2):p_3(3):p_3(4)=4:3:2:1$

(2)

$$p_N(m)=\frac{2(N-m+2)}{(N+1)(N+2)}\quad (1 \leqq m \leqq N+1)\quad \cdots\cdots ①$$

であると推測される。

① が成り立つことを数学的帰納法で証明する。

[1]　$N=1$ のとき，① について

$m=1$ のとき　　左辺 $=p_1(1)=\dfrac{2}{3}$，右辺 $=\dfrac{2(1-1+2)}{(1+1)(1+2)}=\dfrac{2}{3}$

$m=2$ のとき　　左辺 $=p_1(2)=\dfrac{1}{3}$，右辺 $=\dfrac{2(1-2+2)}{(1+1)(1+2)}=\dfrac{1}{3}$

よって，$N=1$ のとき ① は成り立つ。

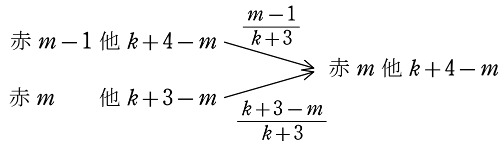
[2]　$N=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$p_k(m)=\frac{2(k-m+2)}{(k+1)(k+2)}\quad (1 \leqq m \leqq k+1)\quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つと仮定する。

$2 \leqq m \leqq k+1$ を満たす m に対し，$N=k+1$ のときの確率 $p_{k+1}(m)$ は，② を用いると次のようになる。

$$\begin{aligned}p_{k+1}(m)&=p_k(m-1)\cdot\frac{m-1}{k+3}+p_k(m)\cdot\frac{k+3-m}{k+3}\\&=\frac{2(k-m+3)}{(k+1)(k+2)}\cdot\frac{m-1}{k+3}+\frac{2(k-m+2)}{(k+1)(k+2)}\cdot\frac{k+3-m}{k+3}\\&=\frac{2(k-m+3)(k+1)}{(k+1)(k+2)(k+3)}\\&=\frac{2(k-m+3)}{(k+2)(k+3)}\qquad\cdots\cdots ③\end{aligned}$$



$m=1$，$k+2$ の場合，$p_{k+1}(m)$ は

$$p_{k+1}(1)=p_k(1)\cdot\frac{k+2}{k+3}=\frac{2(k+1)}{(k+1)(k+2)}\cdot\frac{k+2}{k+3}=\frac{2}{k+3}$$

$$p_{k+1}(k+2)=p_k(k+1)\cdot\frac{k+1}{k+3}=\frac{2}{(k+1)(k+2)}\cdot\frac{k+1}{k+3}=\frac{2}{(k+2)(k+3)}$$

よって，③ は $m=1$，$k+2$ の場合も成り立つ。

以上から，① は $N=k+1$ のときも成り立つ。

[1]，[2] から，① はすべての自然数 N について成り立つ。

よって　　$p_N(m)=\dfrac{2(N-m+2)}{(N+1)(N+2)}$　$(1 \leqq m \leqq N+1)$

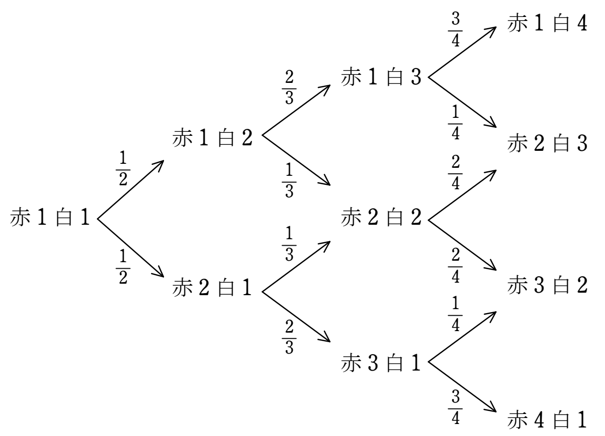
$\boxed{2}$ ●赤白1個ずつの袋から玉, 同じ色を追加, N回後に赤がm個の確率［2007］

袋の中に赤と白の玉が1個ずつ入っている。「この袋から玉を1個取り出して戻し，出た玉と同じ色の玉を袋の中に1個追加する」という操作を N 回繰り返した後，赤の玉が袋の中に m 個ある確率を $p_N(m)$ とする。

(1)　$p_3(m)$ を求めよ。　　　(2)　一般の N に対し $p_N(m)$ を求めよ。

解説

(1)　操作を3回繰り返したとき，袋の中の玉の個数の推移は，次の図のようになる。



$p_3(m)$ は，操作を3回繰り返した後，袋の中に赤の玉が m 個 $(1 \leqq m \leqq 4)$ ある確率であるから，上の図より

$$p_3(1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$$p_3(2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$$

$$p_3(3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$$

$$p_3(4)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

よって　　$p_3(m)=\dfrac{1}{4}$　$(1 \leqq m \leqq 4)$

(2)　$p_N(m)=\dfrac{1}{N+1}$　$(1 \leqq m \leqq N+1)$　……①　　であると推測される。

① が成り立つことを数学的帰納法で証明する。

[1]　$N=1$ のとき，① について

$m=1$ のとき　　左辺 $=p_1(1)=\dfrac{1}{2}$，　右辺 $=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

$m=2$ のとき　　左辺 $=p_1(2)=\dfrac{1}{2}$，　右辺 $=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

よって，$N=1$ のとき ① は成り立つ。

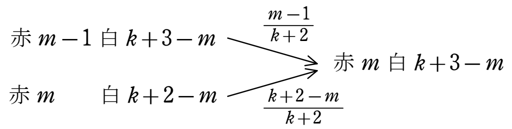
[2]　$N=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$p_k(m)=\frac{1}{k+1}\quad(1 \leqq m \leqq k+1)\quad\cdots\cdots②$$

が成り立つと仮定する。

$2 \leqq m \leqq k+1$ を満たす m に対し，$N=k+1$ のときの確率 $p_{k+1}(m)$ は，② を用いると次のようになる。

$$\begin{aligned}p_{k+1}(m)&=p_k(m-1)\cdot\frac{m-1}{k+2}+p_k(m)\cdot\frac{k+2-m}{k+2}\\&=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{m-1}{k+2}+\frac{1}{k+1}\cdot\frac{k+2-m}{k+2}\\&=\frac{k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{k+2}\quad\cdots\cdots③\end{aligned}$$



$m=1$，$k+2$ の場合，$p_{k+1}(m)$ は

$$p_{k+1}(1)=p_k(1)\cdot\frac{k+1}{k+2}=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{k+1}{k+2}=\frac{1}{k+2}$$

$$p_{k+1}(k+2)=p_k(k+1)\cdot\frac{k+1}{k+2}=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{k+1}{k+2}=\frac{1}{k+2}$$

よって，③ は $m=1$，$k+2$ の場合も成り立つ。

以上から，① は $N=k+1$ のときも成り立つ。

[1]，[2] から，① はすべての自然数 N について成り立つ。

よって　　$p_N(m)=\dfrac{1}{N+1}$　$(1 \leqq m \leqq N+1)$

$\boxed{3}$ ●［理135］単位円外の点Pからの2接点の中点Qの軌跡［2007　数学 I II A B（理）135］

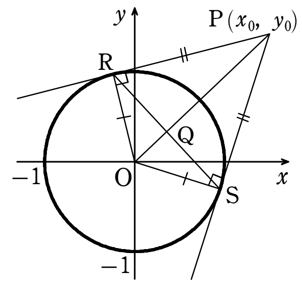
原点 O$(0,\ 0)$ を中心とする半径1の円に，円外の点 P$(x_0,\ y_0)$ から2本の接線を引く。

(1)　2つの接点の中点を Q とするとき，点 Q の座標 $(x_1,\ y_1)$ を点 P の座標 $(x_0,\ y_0)$ を用いて表せ。また OP・OQ $=1$ であることを示せ。

(2)　点 P が直線 $x+y=2$ 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。

解説

(1)　2つの接点を R，S とする。



OR＝OS，PR＝PS であるから，△ORS と △PRS はどちらも二等辺三角形である。

よって，3点 O，Q，P は，この順に一直線上にあり，OP⊥RS である。

△OPR と △ORQ において

$\angle$ORP＝$\angle$OQR＝90°，$\angle$POR＝$\angle$ROQ

であるから　　△OPR∽△ORQ

よって　　OP：OR＝OR：OQ

したがって　　OP・OQ＝OR^2＝1^2＝1

また　　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{\mathrm{OP}^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{{x_0}^2+{y_0}^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

よって　　$(x_1,\ y_1)=\left(\dfrac{x_0}{{x_0}^2+{y_0}^2},\ \dfrac{y_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}\right)$

(2)　点 P$(x_0,\ y_0)$ が直線 $x+y=2$ 上を動くとき　　$x_0+y_0=2$　……①

(1) の結果から　　$x_0=({x_0}^2+{y_0}^2)x_1$，　$y_0=({x_0}^2+{y_0}^2)y_1$　……②

OP・OQ＝1 すなわち OP^2・OQ^2＝1 から　　$({x_0}^2+{y_0}^2)({x_1}^2+{y_1}^2)=1$

${x_1}^2+{y_1}^2 \neq 0$ であるから　　${x_0}^2+{y_0}^2=\dfrac{1}{{x_1}^2+{y_1}^2}$

これと ② から　　$x_0=\dfrac{x_1}{{x_1}^2+{y_1}^2}$，　$y_0=\dfrac{y_1}{{x_1}^2+{y_1}^2}$　……③

①，③ から　　$\dfrac{x_1}{{x_1}^2+{y_1}^2}+\dfrac{y_1}{{x_1}^2+{y_1}^2}=2$

$${x_1}^2-\frac{1}{2}x_1+{y_1}^2-\frac{1}{2}y_1=0$$

よって　　$\left(x_1-\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(y_1-\dfrac{1}{4}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2$

したがって，${x_1}^2+{y_1}^2 \neq 0$ に注意すると，点 Q$(x_1,\ y_1)$ の軌跡は，点 $\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ の円である。ただし，原点を除く。

4 ●[理205]3次方程式の解α,β,γに対し，$\gamma-\alpha$の動く範囲[2007　数学ⅠⅡＡＢ(理)205]

(1)　関数 $f(x)=2x^3-3x^2+1$ のグラフをかけ。

(2)　方程式 $f(x)=a$（a は実数）が相異なる3つの実数解 $\alpha<\beta<\gamma$ をもつとする。
$l=\gamma-\alpha$ を β のみを用いて表せ。

(3)　a が (2) の条件のもとで変化するとき，l の動く範囲を求めよ。

解説

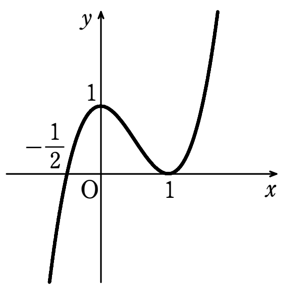
(1)　$f(x)=2x^3-3x^2+1$ を微分すると

$$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0,\ 1$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 1	↘	極小 0	↗



また　　$f(x)=(x-1)^2(2x+1)$

よって，$y=f(x)$ のグラフは，右の図のようになる。

(2)　$f(x)=a$ から　　$2x^3-3x^2+1-a=0$

解と係数の関係から

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{3}{2}\quad\cdots\cdots ①,\qquad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0\quad\cdots\cdots ②$$

① から　　$\alpha+\gamma=-\beta+\dfrac{3}{2}$

これを ② に代入すると

$$\gamma\alpha=-\beta(\alpha+\gamma)=-\beta\left(-\beta+\frac{3}{2}\right)=\beta^2-\frac{3}{2}\beta$$

よって　　$l^2=(\gamma-\alpha)^2=(\alpha+\gamma)^2-4\alpha\gamma$

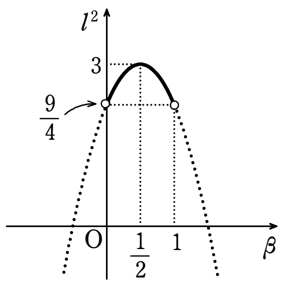
$$=\left(-\beta+\frac{3}{2}\right)^2-4\left(\beta^2-\frac{3}{2}\beta\right)=\beta^2-3\beta+\frac{9}{4}-4\beta^2+6\beta$$

$$=-3\beta^2+3\beta+\frac{9}{4}$$

$l=\gamma-\alpha>0$ であるから　　$l=\sqrt{-3\beta^2+3\beta+\dfrac{9}{4}}$

(3)　$l^2=-3\beta^2+3\beta+\dfrac{9}{4}=-3\left(\beta-\dfrac{1}{2}\right)^2+3$

また，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点が3個であるように a が変化するとき，(1) の図から $0<\beta<1$ である。



よって　　$\dfrac{9}{4}<l^2\leqq 3$　　　ゆえに　　$\dfrac{3}{2}<l\leqq\sqrt{3}$

5 ○[文205]2つの放物線C, Dの2本の共通接線とCが囲む面積[2007　数学ⅠⅡＡＢ(文理)205]

2つの放物線 $C:\ y=\dfrac{1}{2}x^2$，$D:\ y=-(x-a)^2$ を考える。a は正の実数である。

(1)　C 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2\right)$ における C の接線 ℓ を求めよ。

(2)　ℓ がさらに D とも接するとき，ℓ を C と D の共通接線という。2本の (C と D の) 共通接線 ℓ_1，ℓ_2 を求めよ。

(3)　共通接線 ℓ_1，ℓ_2 と C で囲まれた図形の面積を求めよ。

解説

(1)　$y=\dfrac{1}{2}x^2$ から　　$y'=x$

よって，点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2\right)$ における C の接線 ℓ の方程式は

$$y-\frac{1}{2}t^2=t(x-t)\qquad すなわち\qquad y=tx-\frac{1}{2}t^2\quad\cdots\cdots ①$$

(2)　① と $y=-(x-a)^2$ から y を消去すると　　$tx-\dfrac{1}{2}t^2=-(x-a)^2$

整理して　　　$x^2+(t-2a)x+a^2-\dfrac{1}{2}t^2=0$

ℓ が放物線 D とも接するとき，この x についての2次方程式の判別式は0であるから

$$(t-2a)^2-4\left(a^2-\frac{1}{2}t^2\right)=0$$

整理すると　　$3t^2-4at=0$　　　　すなわち　　$t(3t-4a)=0$

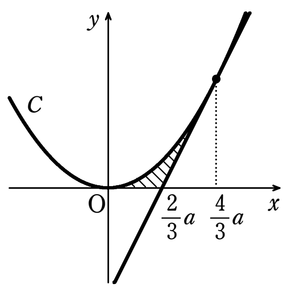
よって　　　$t=0,\ \dfrac{4}{3}a$

ℓ_1，ℓ_2 の方程式は，$t=0,\ \dfrac{4}{3}a$ を ① に代入して　　$y=0,\ y=\dfrac{4}{3}ax-\dfrac{8}{9}a^2$

(3)　接線 $y=\dfrac{4}{3}ax-\dfrac{8}{9}a^2$ と x 軸との交点の x 座標は，

$\dfrac{4}{3}ax-\dfrac{8}{9}a^2=0$ を解いて　　$x=\dfrac{2}{3}a$

ℓ_1，ℓ_2 と C で囲まれた図形は右の図の斜線部分であるから，求める面積を S とすると



$$S=\int_0^{\frac{4}{3}a}\frac{1}{2}x^2dx-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}a-\frac{2}{3}a\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}a\right)^2$$

$$=\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^{\frac{4}{3}a}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}a\cdot\frac{8}{9}a^2$$

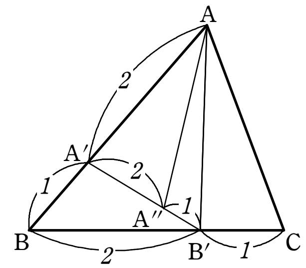
$$=\frac{32}{81}a^3-\frac{8}{27}a^3=\frac{8}{81}a^3$$

6 ●[文230]3直線が△ABCの重心で交わることの証明[2007　数学ⅠⅡＡＢ(文理)230]

△ABC の辺 AB，BC，CA を 2：1 に内分する点をそれぞれ A′，B′，C′ とし，△A′B′C′ の辺 A′B′，B′C′，C′A′ を 2：1 に内分する点をそれぞれ A″，B″，C″ とする。このとき，直線 AA″，BB″，CC″ は △ABC の重心で交わることを証明せよ。

解説

(解1)　△ABCの重心を G とする。



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とすると　　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{3}$

点 A″ は線分 A′B′ を 2：1 に内分するから

$$\overrightarrow{\mathrm{AA''}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AA'}}+2\overrightarrow{\mathrm{AB'}}}{2+1}$$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AA'}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB'}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\cdot\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{2+1}$$

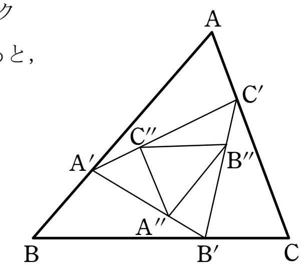
$$=\frac{4}{9}(\vec{b}+\vec{c})=\frac{4}{3}\cdot\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AG}}$$

よって，G は直線 AA″ 上にある。

始点を B，C にとって同様の議論を行うと，$\overrightarrow{\mathrm{BB''}}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{BG}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CC''}}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ となり，G が直線 BB″，CC″上にあることがいえる。

したがって，直線 AA″，BB″，CC″ は △ABC の重心 G で交わる。

(解2)　A，B，C，A′，B′，C′，A″，B″，C″ の位置ベクトルを順に $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{a'}$，$\vec{b'}$，$\vec{c'}$，$\vec{a''}$，$\vec{b''}$，$\vec{c''}$ とすると，



$\vec{a'}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$，$\vec{b'}=\dfrac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}$，$\vec{c'}=\dfrac{\vec{c}+2\vec{a}}{3}$ であるから

$$\vec{a''}=\frac{\vec{a'}+2\vec{b'}}{3}=\frac{\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}+2\cdot\dfrac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}}{3}$$

$$=\frac{\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{c}}{9}$$

同様に　　$\vec{b''}=\dfrac{4\vec{a}+\vec{b}+4\vec{c}}{9}$，$\vec{c''}=\dfrac{4\vec{a}+4\vec{b}+\vec{c}}{9}$

直線 AA″，BB″，CC″ 上にある点を，それぞれ $\mathrm{P}(\vec{p})$，$\mathrm{Q}(\vec{q})$，$\mathrm{R}(\vec{r})$ とすると，$\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ は s，t，u を実数として，次のように表される。

$$\vec{p}=(1-s)\vec{a}+s\vec{a''}=(1-s)\vec{a}+s\cdot\frac{\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{c}}{9}=\left(1-\frac{8}{9}s\right)\vec{a}+\frac{4}{9}s\vec{b}+\frac{4}{9}s\vec{c}$$

$$\vec{q}=(1-t)\vec{b}+t\,\vec{b''}=\frac{4}{9}t\,\vec{a}+\left(1-\frac{8}{9}t\right)\vec{b}+\frac{4}{9}t\,\vec{c}$$

$$\vec{r}=(1-u)\vec{c}+u\vec{c''}=\frac{4}{9}u\vec{a}+\frac{4}{9}u\vec{b}+\left(1-\frac{8}{9}u\right)\vec{c}$$

ここで $s=t=u=\dfrac{3}{4}$ とすると，$\vec{p}=\vec{q}=\vec{r}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ となり，これは △ABC の重心の位置ベクトルである。

よって，直線 AA″，BB″，CC″ は △ABC の重心で交わる。

$\boxed{7}$ ●[文244]4次方程式の実数解が等差数列となる係数[2007 数学ⅠⅡＡＢ(文理)244]

p を実数とする。方程式 $x^4+(8-2p)x^2+p=0$ が相異なる 4 個の実数解をもち，これらの解を小さい順に並べたときそれらは等差数列をなすとする。この p を求めよ。

(解説)

$x^2=t$ とおくと，与えられた方程式は

$$t^2+(8-2p)t+p=0 \quad \cdots\cdots ①$$

となり，この t についての 2 次方程式が異なる 2 つの正の解をもつことが必要である。

その 2 つの解を α，β $(0<\alpha<\beta)$ とすると，$x^2=\alpha$，β であるから

$$x=\pm\sqrt{\alpha},\ \pm\sqrt{\beta}$$

よって，$-\sqrt{\beta}$，$-\sqrt{\alpha}$，$\sqrt{\alpha}$，$\sqrt{\beta}$ が等差数列をなすから

$$\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}=\sqrt{\alpha}-(-\sqrt{\alpha})$$

すなわち　$\sqrt{\beta}=3\sqrt{\alpha}$　　ゆえに　$\beta=9\alpha$

したがって，① が 2 つの解 α，9α をもつ。

解と係数の関係により　$\alpha+9\alpha=2p-8$ ……②，　$\alpha\cdot 9\alpha=p$ ……③

② から　$p=5\alpha+4$ ……④

③ に代入して p を消去すると　$9\alpha^2-5\alpha-4=0$

よって　$(\alpha-1)(9\alpha+4)=0$　　$\alpha>0$ であるから　$\alpha=1$

このとき，最初の方程式の解は $x=-3$，-1，1，3 となり，等差数列をなすから適する。

求める p の値は，④ に $\alpha=1$ を代入して　$p=9$

$\boxed{8}$ ●2n個の点に対してn組の線分が交わらないように引ける証明[2007]

n を自然数とする。平面上の $2n$ 個の点を 2 個ずつ組にして n 個の組を作り，組となった 2 点を両端とする n 本の線分を作る。このとき，どのような配置の $2n$ 個の点に対しても，n 本の線分が互いに交わらないような n 個の組を作ることができることを示せ。

(解説)

(解 1)　xy 平面で考える。

$2n$ 個の点に対して，まず x 座標が同じものどうしで組に分ける。

その x 座標を小さい方から x_1，x_2，……，x_m $(1\leqq m\leqq 2n)$ として，$2n$ 個の点を

$$\{x_1 \text{の組}\},\ \{x_2 \text{の組}\},\ \cdots\cdots,\ \{x_m \text{の組}\}$$

の順に並べ，それぞれの組では y 座標が小さい点から順に左から並べる。

この並べた点を順に P_1，P_2，……，P_{2n} とすると，これらを番号の順に結んでできる折れ線は交わらないから，P_{2i-1} と P_{2i} $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ を結べばよい。

(解 2)　点を釘と考える。$2n$ 本の点すべてを含むように外側から輪ゴムをかける。

このとき，ゴムに触れている 2 点を順に結ぶと，残りは 0 本または 1 本である。

結んだ線分を除いて同じことを繰り返せばよい。

$\boxed{9}$ ○グラフの概形. (1) y=1/(x^2+1) (2) y=cos(2π/(x^2+1)) [2007]

(1)　関数 $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ のグラフの変曲点を求め，グラフの概形をかけ。

(2)　関数 $y=\cos\dfrac{2\pi}{x^2+1}$ のグラフの概形をかけ。

(解説)

(1)　$y=\dfrac{1}{x^2+1}$ から　$y'=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

$y'=0$ とすると　$x=0$

$$y''=-2\cdot\frac{(x^2+1)^2-x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

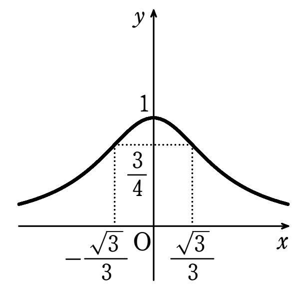
$y''=0$ とすると　$x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

よって，変曲点は　$\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{3}{4}\right)$

また　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$

したがって，グラフの概形は右の図のようになる。

x	⋯	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	⋯	0	⋯	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	⋯
y'	+	+	+	0	−	−	−
y''	+	0	−	−	−	0	+
y	↗	$\frac{3}{4}$	↗	1	↘	$\frac{3}{4}$	↘



(2)　$y=\cos\dfrac{2\pi}{x^2+1}$ から

$$y'=-\left(\sin\frac{2\pi}{x^2+1}\right)\times\frac{-4\pi x}{(x^2+1)^2}=\frac{4\pi x}{(x^2+1)^2}\sin\frac{2\pi}{x^2+1}$$

$y'=0$ とすると，(1) より $0<\dfrac{2\pi}{x^2+1}\leqq 2\pi$ であるから

$\dfrac{4\pi x}{(x^2+1)^2}=0$ または $\dfrac{2\pi}{x^2+1}=\pi$，2π

よって　$x=-1$，0，1

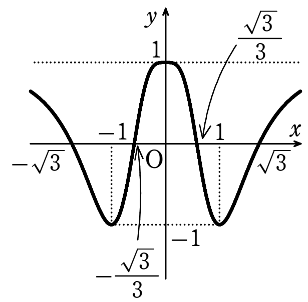
$y=0$ とすると　$\dfrac{2\pi}{x^2+1}=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$

よって　$x=\pm\sqrt{3}$，$\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

また　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\cos\frac{2\pi}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\cos\frac{2\pi}{x^2+1}=1$

したがって，グラフの概形は右の図のようになる。

x	⋯	−1	⋯	0	⋯	1	⋯
y'	−	0	+	0	−	0	+
y	↘	−1	↗	1	↘	−1	↗



$\boxed{10}$ ●[3C176]定積分の漸化式で数列を定義. x軸回転の体積と極限[2007 数学ⅢＣ176]

数列 $\{a_n\}$ $(a_n>0)$ を次の規則によって定める。

$$a_1=1,\ \int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

曲線 $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ と，x 軸および 2 直線 $x=a_n$，$x=a_{n+1}$ で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転させた回転体の体積を V_n とする。このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,V_n$ を求めよ。

(解説)

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right]_{a_n}^{a_{n+1}}=\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{a_{n+1}{}^2}-\sqrt[3]{a_n{}^2}\right)$$

よって，条件から　$\sqrt[3]{a_{n+1}{}^2}-\sqrt[3]{a_n{}^2}=\dfrac{2}{3}$　　また　$\sqrt[3]{a_1{}^2}=1$

ゆえに，数列 $\left\{\sqrt[3]{a_n{}^2}\right\}$ は，初項 1，公差 $\dfrac{2}{3}$ の等差数列であるから

$$\sqrt[3]{a_n{}^2}=1+\frac{2}{3}(n-1)=\frac{1}{3}(2n+1) \qquad \text{よって} \quad a_n{}^2=\left(\frac{2n+1}{3}\right)^3$$

$a_n>0$ であるから　$a_n=\left(\dfrac{2n+1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$

また　$$V_n=\pi\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\pi\Big[3\sqrt[3]{x}\Big]_{a_n}^{a_{n+1}}=3\pi\left(\sqrt[3]{a_{n+1}}-\sqrt[3]{a_n}\right)$$

$$=3\pi\left(\sqrt{\frac{2n+3}{3}}-\sqrt{\frac{2n+1}{3}}\right)=\sqrt{3}\,\pi\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}\right)$$

よって　$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,V_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\sqrt{3}\,\pi\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{3}\sqrt{n}\,\pi}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{3}\,\pi}{\sqrt{2+\dfrac{3}{n}}+\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}\,\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}\pi$$

11 ●[3C195]A^n=Eを満たす上三角行列(n=2, 3, 4)[2007 数学ⅢC 195]

2 行 2 列の行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える。a, b, d が実数で $c=0$ である行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ を上三角行列という。また，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。

(1) $A^2=E$ を満たす上三角行列 A をすべて求めよ。

(2) $A^3=E$ を満たす上三角行列 A をすべて求めよ。

(3) 上三角行列 A が $A^4=E$ を満たすとき，$A^2=E$ となることを示せ。

解説

上三角行列 A を，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ とおく。

(1) $A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & b(a+d) \\ 0 & d^2 \end{pmatrix}$

$A^2=E$ が成り立つための条件は

$a^2=1$ ……①，$b(a+d)=0$ ……②，$d^2=1$ ……③

①，③ から　$(a,\ d)=(\pm 1,\ \pm 1)$ (複号任意)

[1] $a+d=0$，すなわち $(a,\ d)=(1,\ -1)$，$(-1,\ 1)$ のとき，② から，b は任意の実数。

[2] $a+d \neq 0$，すなわち $(a,\ d)=(1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$ のとき，② から　$b=0$

よって　$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$　ただし，b は任意の実数。

(2) $A^3=A^2A=\begin{pmatrix} a^2 & b(a+d) \\ 0 & d^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^3 & b(a^2+ad+d^2) \\ 0 & d^3 \end{pmatrix}$

$A^3=E$ が成り立つための条件は

$a^3=1$ ……④，$b(a^2+ad+d^2)=0$ ……⑤，$d^3=1$ ……⑥

a は実数であるから，④ より　$a=1$

d は実数であるから，⑥ より　$d=1$　ゆえに，⑤ から　$b=0$

よって　$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $A^4=A^2A^2=\begin{pmatrix} a^2 & b(a+d) \\ 0 & d^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2 & b(a+d) \\ 0 & d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^4 & b(a+d)(a^2+d^2) \\ 0 & d^4 \end{pmatrix}$

$A^4=E$ が成り立つための条件は

$a^4=1$ ……⑦，$b(a+d)(a^2+d^2)=0$ ……⑧，$d^4=1$ ……⑨

a は実数で，$a^2 \geqq 0$ であるから，⑦ より　$a^2=1$

d は実数で，$d^2 \geqq 0$ であるから，⑨ より　$d^2=1$

$a^2=1$，$d^2=1$ を ⑧ に代入して　$b(a+d)=0$

よって　$A^2=\begin{pmatrix} a^2 & b(a+d) \\ 0 & d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$

したがって，上三角行列 A が $A^4=E$ を満たすとき，$A^2=E$ となる。

12 ●点列の漸化式.(3)周期Mで点が一致する行列の存在証明[2007]

平面上の点の列 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ $(n=0,\ 1,\ \cdots\cdots)$ を次のように定める。

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

ただし，t は $0<t<2$ を満たす定数とし，$a=1-\dfrac{t^2}{2}$，$b=-\dfrac{t}{2}(2+t)$，$c=\dfrac{t}{2}(2-t)$ とする。

(1) すべての n に対して，点 P_n が楕円 $x^2+\dfrac{2+t}{2-t}y^2=1$ 上にあることを示せ。

(2) $t=1$ とするとき，すべての n に対して $\mathrm{P}_{n+N}=\mathrm{P}_n$ を満たす最小の自然数 N を求めよ。

(3) M を 3 以上の自然数とする。このとき，すべての n に対して $\mathrm{P}_{n+M}=\mathrm{P}_n$ が成り立つような t $(0<t<2)$ が存在することを示せ。

解説

(1) $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax_n+by_n \\ cx_n+ay_n \end{pmatrix}$ から　$\begin{cases} x_{n+1}=ax_n+by_n \\ y_{n+1}=cx_n+ay_n \end{cases}$

点 P_n $(n=0,\ 1,\ \cdots\cdots)$ が楕円 $x^2+\dfrac{2+t}{2-t}y^2=1$ 上にあること，すなわち

${x_n}^2+\dfrac{2+t}{2-t}{y_n}^2=1$ …… ① が成り立つことを数学的帰納法で証明する。

[1] $n=0$ のとき　${x_0}^2+\dfrac{2+t}{2-t}{y_0}^2=1^2+\dfrac{2+t}{2-t}\cdot 0=1$

よって，$n=0$ のとき ① は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき ① が成り立つと仮定する。

$${x_{k+1}}^2+\frac{2+t}{2-t}{y_{k+1}}^2=(ax_k+by_k)^2+\frac{2+t}{2-t}(cx_k+ay_k)^2$$
$$=\left(a^2+\frac{2+t}{2-t}c^2\right){x_k}^2+\left(2ab+\frac{2+t}{2-t}\cdot 2ac\right)x_ky_k+\left(b^2+\frac{2+t}{2-t}a^2\right){y_k}^2$$

ここで　$a^2+\dfrac{2+t}{2-t}c^2=\left(1-\dfrac{t^2}{2}\right)^2+\dfrac{2+t}{2-t}\left\{\dfrac{t}{2}(2-t)\right\}^2$

$=1-t^2+\dfrac{t^4}{4}+\dfrac{t^2}{4}(4-t^2)=1$

$2ab+\dfrac{2+t}{2-t}\cdot 2ac=2\left(1-\dfrac{t^2}{2}\right)\left\{-\dfrac{t}{2}(2+t)+\dfrac{2+t}{2-t}\cdot\dfrac{t}{2}(2-t)\right\}=0$

$b^2+\dfrac{2+t}{2-t}a^2=\left\{-\dfrac{t}{2}(2+t)\right\}^2+\dfrac{2+t}{2-t}\left(1-\dfrac{t^2}{2}\right)^2$

$=\dfrac{2+t}{4(2-t)}\{t^2(4-t^2)+4-4t^2+t^4\}=\dfrac{2+t}{2-t}$

よって　${x_{k+1}}^2+\dfrac{2+t}{2-t}{y_{k+1}}^2={x_k}^2+\dfrac{2+t}{2-t}{y_k}^2=1$

したがって，$n=k+1$ のときも ① は成り立つ。

以上から，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ について ① は成り立つから，すべての n に対して，点 P_n は楕円 $x^2+\dfrac{2+t}{2-t}y^2=1$ にある。

(2) $t=1$ のとき　$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$　この行列を A とする。

$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ により，P_n を順に求めると

$\mathrm{P}_0(1,\ 0)$，$\mathrm{P}_1\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{P}_2\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{P}_3(-1,\ 0)$，

$\mathrm{P}_4\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{P}_5\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{P}_6(1,\ 0)$

よって，$N=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ に対しては　$\mathrm{P}_{0+N} \neq \mathrm{P}_0$

また，ハミルトン・ケーリーの定理により　$A^2-A+E=O$　(E は単位行列)

両辺に $A+E$ を掛けると　$A^3+E=O$　ゆえに　$A^3=-E$

よって，$A^6=(A^3)^2=(-E)^2=E$ となるから，$\mathrm{P}_{n+6}=\mathrm{P}_n$ が成り立つ。

以上から，求める最小の自然数 N は　$N=6$

(3) A が表す 1 次変換は，y 軸方向に $\sqrt{\dfrac{2+t}{2-t}}$ 倍に拡大して，原点を中心に回転移動し，y 軸方向に $\sqrt{\dfrac{2-t}{2+t}}$ 倍に縮小する変換であると考えられる。

そこで，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\dfrac{2+t}{2-t}} \end{pmatrix}$ とおいて，この回転移動を表す行列を求めると

$$BAB^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\dfrac{2+t}{2-t}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\dfrac{t^2}{2} & -\dfrac{t}{2}(2+t) \\ \dfrac{t}{2}(2-t) & 1-\dfrac{t^2}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\dfrac{2-t}{2+t}} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 1-\dfrac{t^2}{2} & -\dfrac{t}{2}\sqrt{2^2-t^2} \\ \dfrac{t}{2}\sqrt{2^2-t^2} & 1-\dfrac{t^2}{2} \end{pmatrix}$$

ここで $t=2\sin\dfrac{\pi}{M}$ とすると，$BAB^{-1}=\begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi}{M} & -\sin\dfrac{2\pi}{M} \\ \sin\dfrac{2\pi}{M} & \cos\dfrac{2\pi}{M} \end{pmatrix}$ となる。

このとき，M は 3 以上であるから $0<\dfrac{\pi}{M}<\dfrac{\pi}{2}$ であり，$0<t<2$ を満たす。

また，$A^M=B^{-1}\begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi}{M} & -\sin\dfrac{2\pi}{M} \\ \sin\dfrac{2\pi}{M} & \cos\dfrac{2\pi}{M} \end{pmatrix}^M B=B^{-1}EB=E$ が成り立つ。

以上から，すべての n に対して $\mathrm{P}_{n+M}=\mathrm{P}_n$ が成り立つような t $(0<t<2)$ が存在する。