$\boxed{1}$ ●［文104］より多く赤玉を取り出す袋の選択と期待値［2008 数学ⅠⅡAB（文理）104］

袋Aの中に赤玉と白玉がそれぞれ2つ入っていることと，袋Bの中に赤玉3つと白玉2つが入っていることがわかっている。

(1) 袋Bから2つの玉を取り出すとき，取り出される赤玉の個数の期待値を求めよ。

(2) 袋Aから1つの玉を取り出し，そのあと袋Bから2つの玉を取り出す。その3つの玉のうち赤玉が2つである確率を求めよ。

(3) 袋Aから1つの玉を取り出したあとで，2つの玉を袋Aから取り出すかあるいは2つの玉を袋Bから取り出すかのどちらかを選択できるとする。できるだけ多くの赤玉を取り出そうと選択したとき，最終的に取り出される赤玉の個数の期待値を求めよ。

（解説）

(1) 取り出される赤玉の個数を $X$ とする。

$X$ がとりうる値は0，1，2であり

$$P(X=0)=\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10},\quad P(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}=\frac{6}{10},\quad P(X=2)=\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$$

よって，求める期待値は　$0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{3}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$

(2) 袋Aから1つの玉を取り出すとき，取り出される赤玉の個数を $Y$ とすると，$Y$ がとりうる値は0，1であり

$$P(Y=0)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\quad P(Y=1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

取り出される3つの玉のうち赤玉が2つになるのは，$(Y,\ X)=(0,\ 2)$，$(1,\ 1)$ のときである。

よって，求める確率は　$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}=\frac{9}{20}$

(3) 袋Aから1つの玉を取り出したあと，袋Aの中の玉は次のようになる。

［1］ $Y=0$ のとき　{赤，赤，白}

［2］ $Y=1$ のとき　{赤，白，白}

［1］の袋から2つの玉を取り出すとき

取り出される赤玉の個数 $Z$ の期待値を求めると

$$1\times\frac{{}_2C_1}{{}_3C_2}+2\times\frac{{}_2C_2}{{}_3C_2}=1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

$\frac{4}{3}>\frac{6}{5}$ であるから，2回目は袋Aを選択する。

上の計算より $P(Z=1)=\frac{2}{3}$，$P(Z=2)=\frac{1}{3}$ である。

［2］の袋から2つの玉を取り出すとき

取り出される赤玉の個数の期待値を求めると

$$0\times\frac{{}_2C_2}{{}_3C_2}+1\times\frac{{}_2C_1}{{}_3C_2}=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

$\frac{2}{3}<\frac{6}{5}$ であるから，2回目は袋Bを選択する。

最終的に取り出される赤玉の個数については

1つ：$(Y,\ Z)=(0,\ 1)$，$(Y,\ X)=(1,\ 0)$

2つ：$(Y,\ Z)=(0,\ 2)$，$(Y,\ X)=(1,\ 1)$

3つ：$(Y,\ X)=(1,\ 2)$

のいずれかになるから，求める期待値は

$$1\times\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}\right)+2\times\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}\right)+3\times\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}$$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{20}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{6}{10}\right)+\frac{9}{20}=\frac{53}{30}$$

$\boxed{2}$ ●[理104]より多く赤玉を取り出す袋の選択と期待値[2008 数学ⅠⅡＡＢ(理)104]

袋Aの中に赤玉と白玉がそれぞれ4つ入っていることと，袋Bの中に赤玉3つと白玉2つが入っていることがわかっている。

(1) 袋Bから2つの玉を取り出すとき，取り出される赤玉の個数の期待値を求めよ。

(2) 袋Aから3つの玉を取り出し，そのあと袋Bから2つの玉を取り出す。その5つの玉のうち赤玉が3つである確率を求めよ。

(3) 袋Aから3つの玉を取り出したあとで，2つの玉を袋Aから取り出すかあるいは2つの玉を袋Bから取り出すかのどちらかを選択できるとする。できるだけ多くの赤玉を取り出そうと選択したとき，最終的に取り出される赤玉の個数の期待値を求めよ。

解説

(1) 袋Bから2つの玉を取り出すとき，取り出される赤玉の個数を $X$ とする。

$X$ がとりうる値は0，1，2であり

$$P(X=0)=\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10},\quad P(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}=\frac{6}{10},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$$

よって，求める期待値は　$0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{3}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$ (個)

(2) 袋Aから3つの玉を取り出すとき，取り出される赤玉の個数を $Y$ とする。

$Y$ がとりうる値は0，1，2，3であり

$$P(Y=0)=\frac{{}_4C_3}{{}_8C_3}=\frac{4}{56}=\frac{1}{14},\quad P(Y=1)=\frac{{}_4C_2\times{}_4C_1}{{}_8C_3}=\frac{6\times4}{56}=\frac{6}{14},$$

$$P(Y=2)=\frac{{}_4C_1\times{}_4C_2}{{}_8C_3}=\frac{4\times6}{56}=\frac{6}{14},\quad P(Y=3)=\frac{{}_4C_3}{{}_8C_3}=\frac{4}{56}=\frac{1}{14}$$

取り出される5つの玉のうち赤玉が3つになるのは，$(Y,\ X)=(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (3,\ 0)$ のときである。

よって，求める確率は　$\frac{6}{14}\cdot\frac{3}{10}+\frac{6}{14}\cdot\frac{6}{10}+\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{10}=\frac{55}{14\cdot10}=\frac{11}{28}$

(3) 袋Aから3つの玉を取り出したあと，袋Aの中の玉は次のようになる。

[1]　$Y=0$ のとき　{赤，赤，赤，赤，白}

[2]　$Y=1$ のとき　{赤，赤，赤，白，白}

[3]　$Y=2$ のとき　{赤，赤，白，白，白}

[4]　$Y=3$ のとき　{赤，白，白，白，白}

一方，袋Bは{赤，赤，赤，白，白}であるから，袋A，袋Bの選択については，[1]のときは袋A，[2]～[4]のときは袋Bを選択すればよい。

{赤，赤，赤，赤，白}から2つの玉を取り出すとき，取り出される赤玉の個数を $Z$ とすると，$Z$ がとりうる値は1，2であり

$$P(Z=1)=\frac{{}_4C_1}{{}_5C_2}=\frac{4}{10},\quad P(Z=2)=\frac{{}_4C_2}{{}_5C_2}=\frac{6}{10}$$

最終的に取り出される赤玉の個数については

1つ：$(Y,\ Z)=(0,\ 1)$，$(Y,\ X)=(1,\ 0)$

2つ：$(Y,\ Z)=(0,\ 2)$，$(Y,\ X)=(1,\ 1),\ (2,\ 0)$

3つ：$(Y,\ X)=(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (3,\ 0)$

4つ：$(Y,\ X)=(2,\ 2),\ (3,\ 1)$

5つ：$(Y,\ X)=(3,\ 2)$

のいずれかになるから，求める期待値は

$$1\times\left(\frac{1}{14}\cdot\frac{4}{10}+\frac{6}{14}\cdot\frac{1}{10}\right)+2\times\left(\frac{1}{14}\cdot\frac{6}{10}+\frac{6}{14}\cdot\frac{6}{10}+\frac{6}{14}\cdot\frac{1}{10}\right)$$

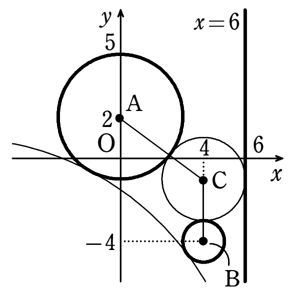
$$+3\times\left(\frac{6}{14}\cdot\frac{3}{10}+\frac{6}{14}\cdot\frac{6}{10}+\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{10}\right)+4\times\left(\frac{6}{14}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{14}\cdot\frac{6}{10}\right)+5\times\frac{1}{14}\cdot\frac{3}{10}$$

$$=\frac{10}{140}+\frac{96}{140}+\frac{165}{140}+\frac{96}{140}+\frac{15}{140}=\frac{382}{140}=\frac{191}{70}\ (個)$$

$\boxed{3}$ ●[文126]2つの定円に外接し，直線x=6に接する円[2008 数学ⅠⅡＡＢ(文理)126]

2つの円 $x^2+(y-2)^2=9$ と $(x-4)^2+(y+4)^2=1$ に外接し，直線 $x=6$ に接する円を求めよ。ただし，2つの円がただ1点を共有し，互いに外部にあるとき，外接するという。

解説




2つの円 $x^2+(y-2)^2=9$，$(x-4)^2+(y+4)^2=1$ の中心(0，2)，(4，−4)をそれぞれA，Bとする。

求める円の中心を $C(p,\ q)$ とすると，円Cは $x\leqq6$ の範囲にあるから $p<6$ であり，半径は $6-p$ となる。

2点A，Cの距離は円Aと円Cの半径の和であるから

$$\sqrt{p^2+(q-2)^2}=3+(6-p)$$

$$p^2+(q-2)^2=(9-p)^2$$

$$(q-2)^2=-18p+81\quad\cdots\cdots①$$

2点B，Cの距離は円Bと円Cの半径の和であるから

$$\sqrt{(p-4)^2+(q+4)^2}=1+(6-p)$$

$$(p-4)^2+(q+4)^2=(7-p)^2$$

$$(q+4)^2=-6p+33\quad\cdots\cdots②$$

②×3−① から　$3(q+4)^2-(q-2)^2=18$

整理して　$q^2+14q+13=0$

$(q+1)(q+13)=0$　ゆえに　$q=-1,\ -13$

② より　$q=-1$ のとき　$p=4,\quad 6-p=2$

$q=-13$ のとき　$p=-8,\ 6-p=14$

どちらの場合も $p<6$ を満たすから適する。

したがって，求める円の方程式は

$$(x-4)^2+(y+1)^2=4,\quad (x+8)^2+(y+13)^2=196$$

$\boxed{4}$ ●［文218］(x-2)^2+|2x+3y-1|<4の領域の面積, x+yの最大最小［2008 数学ⅠⅡＡＢ(文理)218］

次の不等式の表す領域を $D$ とする。

$$(x-2)^2+|2x+3y-1|\leqq 4$$

(1) $D$ の概形を描き，その面積を求めよ。

(2) 点 $(x,\ y)$ が $D$ 内を動くとき，$x+y$ の最大値と最小値およびそれらの値をとる点の座標を求めよ。

解説

(1) $(x-2)^2+|2x+3y-1|\leqq 4$ …… ① とする。

[1] $2x+3y-1\geqq 0$ のとき

① から　$x^2-4x+4+2x+3y-1\leqq 4$

$3y\leqq -x^2+2x+1$

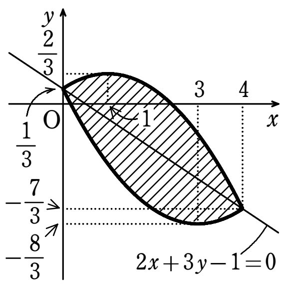
よって　$y\leqq -\dfrac{1}{3}(x-1)^2+\dfrac{2}{3}$

[2] $2x+3y-1<0$ のとき

① から　$x^2-4x+4-(2x+3y-1)\leqq 4$

$3y\geqq x^2-6x+1$

よって　$y\geqq \dfrac{1}{3}(x-3)^2-\dfrac{8}{3}$




[1]，[2] から領域 $D$ は右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。領域 $D$ の面積は

$$\int_0^4\left[-\frac{1}{3}(x-1)^2+\frac{2}{3}-\left\{\frac{1}{3}(x-3)^2-\frac{8}{3}\right\}\right]dx$$

$$=\int_0^4\left\{-\frac{2}{3}x(x-4)\right\}dx=\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}(4-0)^3=\frac{64}{9}$$

(2) $x+y=k$ …… ② とおくと，これは傾きが $-1$，$y$ 切片が $k$ の直線を表す。

この直線が $D$ と共有点をもつような $k$ の値の最大値と最小値を求めればよい。

ここで，2 つの放物線 $y=-\dfrac{1}{3}(x-1)^2+\dfrac{2}{3}$，$y=\dfrac{1}{3}(x-3)^2-\dfrac{8}{3}$ と直線 ② が接する場合を調べる。

[1] $y=-\dfrac{1}{3}(x-1)^2+\dfrac{2}{3}$ から　$y'=-\dfrac{2}{3}(x-1)$

$y'=-1$ とすると　$x=\dfrac{5}{2}$　このとき　$y=-\dfrac{1}{12}$

点 $\left(\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{1}{12}\right)$ は $D$ に含まれるから，② がこの点を通るとき $k$ は最大になる。

[2] $y=\dfrac{1}{3}(x-3)^2-\dfrac{8}{3}$ から　$y'=\dfrac{2}{3}(x-3)$

$y'=-1$ とすると　$x=\dfrac{3}{2}$　このとき　$y=-\dfrac{23}{12}$

点 $\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{23}{12}\right)$ は $D$ に含まれるから，② がこの点を通るとき $k$ は最小になる。

以上から，$x+y$ は

$(x,\ y)=\left(\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{1}{12}\right)$ のとき最大値 $\dfrac{29}{12}$

$(x,\ y)=\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{23}{12}\right)$ のとき最小値 $-\dfrac{5}{12}$　をとる。

$\boxed{5}$ ●［文276］不等式3x+2y≦2008等を満たす整数の組の個数［2008 数学ⅠⅡＡＢ(文理)276］

(1) $3x+2y\leqq 8$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

(2) $3x+2y\leqq 2008$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

解説

(1) 0 以上の整数 $x$ のとりうる値は　$x=0,\ 1,\ 2$

$3x+2y\leqq 8$ を満たす 0 以上の整数 $y$ は

$x=0$ のとき，$2y\leqq 8$ から　$y=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

$x=1$ のとき，$3+2y\leqq 8$ から　$y=0,\ 1,\ 2$

$x=2$ のとき，$6+2y\leqq 8$ から　$y=0,\ 1$

以上から，求める整数の組 $(x,\ y)$ の個数は　10

(2) $3x+2y\leqq 2008$ …… ① とする。

0 以上の整数 $x$ のとりうる値は　$x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 669$

[1] $x=2k\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 334)$ のとき

① から　$6k+2y\leqq 2008$

よって　$y\leqq 1004-3k$ …… ②

$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 334$ のそれぞれの $k$ の値に対し，② を満たす 0 以上の整数 $y$ は $(1005-3k)$ 個ある。

[2] $x=2k+1\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 334)$ のとき

① から　$6k+3+2y\leqq 2008$

よって　$y\leqq 1002.5-3k$ …… ③

$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 334$ のそれぞれの $k$ の値に対し，③ を満たす 0 以上の整数 $y$ は $(1003-3k)$ 個ある。

[1]，[2] から，① を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数は

$$\sum_{k=0}^{334}\{(1005-3k)+(1003-3k)\}=\sum_{k=0}^{334}(2008-6k)$$

$$=\frac{1}{2}\times 335\times(2008+4)=337010$$

6 ●不等式x/2+y/3+z/6≦10等を満たす整数の組の個数[2008]

(1) $3x+2y\leqq 2008$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

(2) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6}\leqq 10$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めよ。

解説

(1) $3x+2y\leqq 2008$ …… ① とする。

$y=0$ のとき，$x\leqq\dfrac{2008}{3}=669.3\cdots$ であるから，0 以上の整数 $x$ のとりうる値は

$x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 669$

[1] $x=2k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 334)$ のとき

① から　$6k+2y\leqq 2008$

よって　$y\leqq 1004-3k$ …… ②

$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 334$ のそれぞれの $k$ の値に対し，② を満たす 0 以上の整数 $y$ は $(1005-3k)$ 個ある。

[2] $x=2k+1$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 334)$ のとき

① から　$6k+3+2y\leqq 2008$

よって　$y\leqq 1002.5-3k$ …… ③

$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 334$ のそれぞれの $k$ の値に対し，③ を満たす 0 以上の整数 $y$ は $(1003-3k)$ 個ある。

[1]，[2] から，① を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数は

$$\sum_{k=0}^{334}\{(1005-3k)+(1003-3k)\}=\sum_{k=0}^{334}(2008-6k)=\frac{1}{2}\times 335\times(2008+4)$$

$$=337010\ (個)$$

(2) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6}\leqq 10$ から　$3x+2y+z\leqq 60$ …… ④

$y=0,\ z=0$ のとき，$x\leqq 20$ であるから，0 以上の整数 $x$ のとりうる値は

$x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 20$

[1] $x=2k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 10)$ のとき

④ から　$2y+z\leqq 60-6k$ …… ⑤

0 以上の整数 $y$ のとりうる値は　$y=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 30-3k$

このそれぞれの $y$ の値に対し，⑤ から　$z\leqq 60-6k-2y$

この不等式を満たす 0 以上の整数 $z$ は $(61-6k-2y)$ 個ある。

[2] $x=2k-1$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 10)$ のとき

④ から　$2y+z\leqq 63-6k$ …… ⑥

0 以上の整数 $y$ のとりうる値は　$y=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 31-3k$

このそれぞれの $y$ の値に対し，⑥ から　$z\leqq 63-6k-2y$

この不等式を満たす 0 以上の整数 $z$ は $(64-6k-2y)$ 個ある。

[1]，[2] から，④ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数は

$$\sum_{k=0}^{10}\left\{\sum_{y=0}^{30-3k}(61-6k-2y)\right\}+\sum_{k=1}^{10}\left\{\sum_{y=0}^{31-3k}(64-6k-2y)\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{10}\left[\frac{1}{2}(31-3k)\{(61-6k)+1\}\right]+\sum_{k=1}^{10}\left[\frac{1}{2}(32-3k)\{(64-6k)+2\}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{10}(31-3k)^2+\sum_{k=1}^{10}(32-3k)(33-3k)$$

$$=31^2+\sum_{k=1}^{10}\{(31-3k)^2+(32-3k)(33-3k)\}=31^2+\sum_{k=1}^{10}(18k^2-381k+2017)$$

$$=961+18\cdot\frac{1}{6}\cdot 10\cdot 11\cdot 21-381\cdot\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 11+2017\cdot 10=7106\ (個)$$

7 ●[3C48]△ABCのACをs:1−s内分BCをt:1−t内分, s/t (t→+0)の極限[2008 数学ⅢC48]

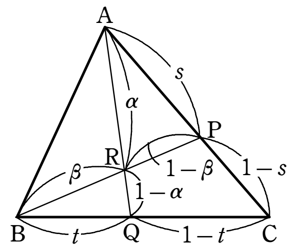
△ABC で辺 AC を $s:(1-s)$ に内分する点を P，辺 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q，線分 AQ と線分 BP の交点を R とする。このとき，

△APR の面積$=2\times$(△BQR の面積) が成り立っているとする。

(1) $s$ を $t$ を用いて表せ。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{s}{t}$ を求めよ。ただし，$t$ が正の範囲で 0 に限りなく近づくとき，$t\longrightarrow +0$ と表す。

解説




(1) $\mathrm{AR}:\mathrm{RQ}=\alpha:(1-\alpha)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{CR}}=(1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\alpha\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$$

$$=(1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\alpha(1-t)\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

$\mathrm{BR}:\mathrm{RP}=\beta:(1-\beta)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{CR}}=\beta\overrightarrow{\mathrm{CP}}+(1-\beta)\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

$$=\beta(1-s)\overrightarrow{\mathrm{CA}}+(1-\beta)\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

よって

$$(1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\alpha(1-t)\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\beta(1-s)\overrightarrow{\mathrm{CA}}+(1-\beta)\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}\neq\vec{0}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{CA}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ であるから

$$1-\alpha=\beta(1-s),\quad \alpha(1-t)=1-\beta$$

これを解くと　$\alpha=\dfrac{s}{s+t-st}$，$\beta=\dfrac{t}{s+t-st}$ …… ①

ここで，$\triangle\mathrm{APR}:\triangle\mathrm{BQR}=2:1$ であるから

$$\frac{1}{2}\times\mathrm{AR}\times\mathrm{RP}\sin\angle\mathrm{ARP}=2\times\frac{1}{2}\times\mathrm{BR}\times\mathrm{RQ}\sin\angle\mathrm{BRQ}$$

$\angle\mathrm{ARP}=\angle\mathrm{BRQ}$ であるから　$\mathrm{AR}\times\mathrm{RP}=2\mathrm{BR}\times\mathrm{RQ}$

すなわち　$\alpha\mathrm{AQ}\times(1-\beta)\mathrm{BP}=2\beta\mathrm{BP}\times(1-\alpha)\mathrm{AQ}$

ゆえに　$\alpha(1-\beta)=2\beta(1-\alpha)$

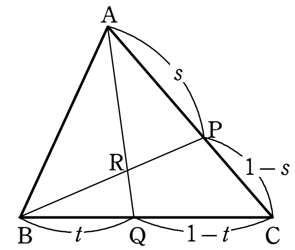
① を代入すると　$\dfrac{s}{s+t-st}\left(1-\dfrac{t}{s+t-st}\right)=\dfrac{2t}{s+t-st}\left(1-\dfrac{s}{s+t-st}\right)$

よって　$(1-t)s^2+2t^2s-2t^2=0$

$0<s<1$，$0<t<1$ であるから

$$s=\frac{-t^2+\sqrt{t^4+(1-t)\cdot 2t^2}}{1-t}=\frac{-t^2+t\sqrt{t^2-2t+2}}{1-t}$$

別解　△BCP と直線 AQ について，メネラウスの定理により




$\dfrac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RP}}\times\dfrac{\mathrm{PA}}{\mathrm{AC}}\times\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QB}}=1$ から

$$\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RP}}\times\frac{s}{1}\times\frac{1-t}{t}=1$$

よって　$\dfrac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RP}}=\dfrac{t}{s(1-t)}$

また，△ACQ と直線 BP について，メネラウスの定理により

$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RQ}}\times\dfrac{\mathrm{QB}}{\mathrm{BC}}\times\dfrac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PA}}=1$ から　$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RQ}}\times\dfrac{t}{1}\times\dfrac{1-s}{s}=1$

よって　$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RQ}}=\dfrac{s}{t(1-s)}$

ゆえに　$\dfrac{\triangle\mathrm{APR}}{\triangle\mathrm{BQR}}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\mathrm{AR}\times\mathrm{RP}\sin\angle\mathrm{ARP}}{\frac{1}{2}\times\mathrm{BR}\times\mathrm{RQ}\sin\angle\mathrm{BRQ}}=\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RQ}}\times\dfrac{\mathrm{RP}}{\mathrm{BR}}$

$$=\frac{s}{t(1-s)}\times\frac{s(1-t)}{t}=\frac{s^2(1-t)}{t^2(1-s)}$$

であり，これが 2 に等しいから　$\dfrac{s^2(1-t)}{t^2(1-s)}=2$

よって　$(1-t)s^2+2t^2s-2t^2=0$

$0<s<1$，$0<t<1$ であるから

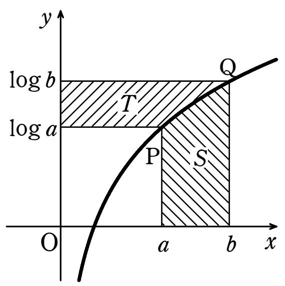
$$s=\frac{-t^2+\sqrt{t^4+(1-t)\cdot 2t^2}}{1-t}=\frac{-t^2+t\sqrt{t^2-2t+2}}{1-t}$$

(2) $\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{s}{t}=\lim_{t\to+0}\frac{-t+\sqrt{t^2-2t+2}}{1-t}=\sqrt{2}$

8 ●[3C167]y=logxとx,y軸への垂線が囲む2つの面積S=Tなるa範囲[2008 数学ⅢＣ167]

曲線 $C$：$y=\log x$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ \log a)$，点 $\mathrm{Q}(b,\ \log b)$ $(1<a<b)$ をとる。点 P，Q から $x$ 軸に下ろした 2 本の垂線と $x$ 軸および曲線 $C$ で囲まれた部分の面積を $S$ とする。点 P，Q から $y$ 軸に下ろした 2 本の垂線と $y$ 軸および曲線 $C$ で囲まれた部分の面積を $T$ とする。このとき，$S=T$ となるように $b$ がとれる $a$ の値の範囲を求めよ。

解説




$$S=\int_a^b \log x\,dx=\Big[x\log x-x\Big]_a^b$$
$$=b\log b-a\log a-(b-a)$$

$y=\log x$ から　　$x=e^y$

$$T=\int_{\log a}^{\log b} e^y dy=\Big[e^y\Big]_{\log a}^{\log b}=b-a$$

$S=T$ となるとき

$$b\log b-a\log a-(b-a)=b-a$$

よって　　$a\log a-2a=b\log b-2b$

したがって，$f(x)=x\log x-2x$ $(x>1)$ とおくと，

$$f(a)=f(b),\ 1<a<b$$

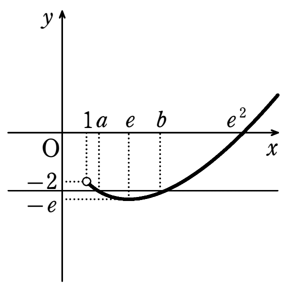
を満たす $b$ が存在するような $a$ の値の範囲が求めるものである。

$f'(x)=\log x+1-2=\log x-1$

$x>1$ において，$f'(x)=0$ とすると　　$x=e$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

| $x$ | 1 | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ／ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ／ | ↘ | $-e$ | ↗ |




また　　$\lim_{x\to 1+0} f(x)=-2$，$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

したがって，求める $a$ の値の範囲は

$$1<a<e$$

9 ●[3C198]A^4+aA^3+bA^2+cA+2E=0からb,cをaで表すなど[2008 数学ⅢＣ198]

$a$，$b$，$c$ を実数として，$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+2$ とする。行列 $A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ と単位行列 $E$ に対して，$A^4+aA^3+bA^2+cA+2E=O$ (ただし $O$ は零行列) とする。

(1)　$b$，$c$ を $a$ を用いて表せ。

(2)　方程式 $f(x)=0$ が少なくとも 1 つ正の解をもつとき，$a$ のとりうる値の範囲を求めよ。

解説

(1)　ハミルトン・ケーリーの定理から　　$A^2+2A+2E=O$

よって　　$A^2=-2A-2E$

$A^3=A^2A=-2A^2-2A=-2(-2A-2E)-2A=2A+4E$

$A^4=A^3A=2A^2+4A=2(-2A-2E)+4A=-4E$

したがって，$A^4+aA^3+bA^2+cA+2E=O$ から

$-4E+a(2A+4E)+b(-2A-2E)+cA+2E=O$

すなわち　　$(2a-2b+c)A+(4a-2b-2)E=O$

$A$ は単位行列 $E$ の実数倍ではないから

$2a-2b+c=0$　……①，　$4a-2b-2=0$　……②

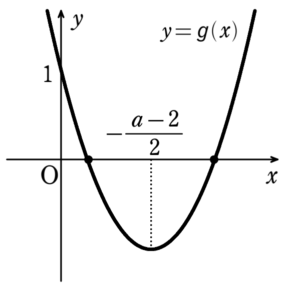
①，② から　　$b=2a-1$，$c=2a-2$

(2)　(1) から　　$f(x)=x^4+ax^3+(2a-1)x^2+(2a-2)x+2$

$=(x^2+2x+2)\{x^2+(a-2)x+1\}$

2 次方程式 $x^2+2x+2=0$ は実数解をもたないから，方程式 $f(x)=0$ が少なくとも 1 つ正の解をもつための条件は，$g(x)=x^2+(a-2)x+1$ とすると，$g(x)=0$ が少なくとも 1 つ正の解をもつことである。

そのための条件は，放物線 $y=g(x)$ が下に凸で，$g(0)=1$ であるから，$g(x)=0$ の判別式を $D$ とすると




$$\begin{cases} D=(a-2)^2-4\geqq 0 & \cdots\cdots ① \\ \text{軸について}\quad -\dfrac{a-2}{2}>0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① から　　$a(a-4)\geqq 0$　　よって　　$a\leqq 0$，$4\leqq a$　……③

② から　　$a<2$　　……④

③ と ④ の共通範囲を求めて　　$a\leqq 0$