1 ●[理44]pは3以上の素数. 2/x+1/y=1/pのとき2x+3yの最小値[2009 数学ⅠⅡＡＢ(理)44]

x，y を正の整数とする。

(1) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ を満たす組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

(2) p を 3 以上の素数とする。$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{p}$ を満たす組 $(x,\ y)$ のうち，$2x+3y$ を最小にする $(x,\ y)$ を求めよ。

解説

(1) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ から　$8y+4x=xy$

よって　$(x-8)(y-4)=32$ …… ①

また，$x>0$，$y>0$ から　$x-8>-8$，$y-4>-4$ …… ②

①，② を満たす整数 $x-8$，$y-4$ の組は

$(x-8,\ y-4)=(1,\ 32),\ (2,\ 16),\ (4,\ 8),\ (8,\ 4),\ (16,\ 2),\ (32,\ 1)$

よって　$(x,\ y)=(9,\ 36),\ (10,\ 20),\ (12,\ 12),\ (16,\ 8),\ (24,\ 6),\ (40,\ 5)$

(2) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{p}$ から　$2py+px=xy$

よって　$(x-2p)(y-p)=2p^2$ …… ③

また，$x>0$，$y>0$ から　$x-2p>-2p$，$y-p>-p$ …… ④

p は 3 以上の素数であるから，$2p^2$ の正の約数は　$1,\ 2,\ p,\ 2p,\ p^2,\ 2p^2$

ゆえに，③，④ を満たす整数 $x-2p$，$y-p$ の組と，そのときの x，y，$2x+3y$ の値は，次の表のようになる。

$x-2p$	1	2	p	$2p$	p^2	$2p^2$
$y-p$	$2p^2$	p^2	$2p$	p	2	1
x	$2p+1$	$2p+2$	$3p$	$4p$	p^2+2p	$2p^2+2p$
y	$2p^2+p$	p^2+p	$3p$	$2p$	$p+2$	$p+1$
$2x+3y$	$6p^2+7p+2$	$3p^2+7p+4$	$15p$	$14p$	$2p^2+7p+6$	$4p^2+7p+3$

ここで，$p\geqq 3$ であるから

$(6p^2+7p+2)-(4p^2+7p+3)=2p^2-1>0$

$(4p^2+7p+3)-(3p^2+7p+4)=p^2-1>0$

$(3p^2+7p+4)-(2p^2+7p+6)=p^2-2>0$

$(2p^2+7p+6)-15p=2p^2-8p+6=2(p-1)(p-3)\geqq 0$

$15p-14p=p>0$

よって　$6p^2+7p+2>4p^2+7p+3>3p^2+7p+4>2p^2+7p+6\geqq 15p>14p$

表より，$2x+3y=14p$ のとき　$(x,\ y)=(4p,\ 2p)$

したがって，$2x+3y$ を最小にする $(x,\ y)$ は　$(x,\ y)=(4p,\ 2p)$

2 ●[文95]さいころn回. 目の積の一の位がjとなる確率Pn(j)の問題[2009 数学ⅠⅡＡＢ(文理)95]

さいころを投げると，1 から 6 までの整数の目が等しい確率で出るとする。さいころを n 回 $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ 投げるとき，出る目の積の一の位が j $(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 9)$ となる確率を $p_n(j)$ とする。

(1) $p_2(0)$，$p_2(1)$，$p_2(2)$ を求めよ。

(2) $p_{n+1}(1)$ を，$p_n(1)$ と $p_n(7)$ を用いて表せ。

(3) $p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)$ を求めよ。

解説

(1) さいころを 2 回投げて，$j=0$ となるのは，

(1 回目，2 回目)$=(2,\ 5),\ (4,\ 5),\ (6,\ 5),\ (5,\ 2),\ (5,\ 4),\ (5,\ 6)$ の 6 通りであるから

$p_2(0)=\dfrac{6}{6^2}=\dfrac{1}{6}$

$j=1$ となるのは，(1 回目，2 回目)$=(1,\ 1)$ の 1 通りであるから

$p_2(1)=\dfrac{1}{6^2}=\dfrac{1}{36}$

$j=2$ となるのは，(1 回目，2 回目)$=(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2)$ の 6 通りであるから

$p_2(2)=\dfrac{6}{6^2}=\dfrac{1}{6}$

(2) $n+1$ 回投げて $j=1$ となるのは，

[1] n 回までの目の積の一の位が 1 で，$n+1$ 回目に 1 が出る。

[2] n 回までの目の積の一の位が 7 で，$n+1$ 回目に 3 が出る。

のどちらかの場合だけである。

よって　$p_{n+1}(1)=\dfrac{1}{6}p_n(1)+\dfrac{1}{6}p_n(7)$

(3) n 回投げて目の積の一の位が「1 または 3 または 7 または 9」すなわち「5 以外の奇数」となるのは，n 回とも 2，4，5，6 以外の目が出る場合，すなわち n 回とも 1 または 3 が出る場合であるから

$$p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)=\left(\frac{2}{6}\right)^n=\frac{1}{3^n}$$

3 ●[理96]さいころをn回投げて出る目の積の一の位がjとなる確率[2009 数学ⅠⅡＡＢ(理)96]

さいころを投げると，1 から 6 までの整数の目が等しい確率で出るとする。さいころを n 回 $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ 投げるとき，出る目の積の一の位が j $(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 9)$ となる確率を $p_n(j)$ とする。

(1) $p_2(0)$，$p_2(1)$，$p_2(2)$ を求めよ。

(2) $p_{n+1}(1)$ を，$p_n(1)$ と $p_n(7)$ を用いて表せ。

(3) $p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)$ を求めよ。

(4) $p_n(5)$ を求めよ。

解説

(1) さいころを 2 回投げて，$j=0$ となるのは，

(1 回目，2 回目)$=(2,\ 5),\ (4,\ 5),\ (6,\ 5),\ (5,\ 2),\ (5,\ 4),\ (5,\ 6)$

の 6 通りであるから　$p_2(0)=\dfrac{6}{6^2}=\dfrac{1}{6}$

$j=1$ となるのは，(1 回目，2 回目)$=(1,\ 1)$ の 1 通りであるから

$p_2(1)=\dfrac{1}{6^2}=\dfrac{1}{36}$

$j=2$ となるのは，

(1 回目，2 回目)$=(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2)$

の 6 通りであるから　$p_2(2)=\dfrac{6}{6^2}=\dfrac{1}{6}$

(2) $n+1$ 回投げて $j=1$ となるのは，次の [1]，[2] のいずれかの場合である。

[1] n 回までの目の積の一の位が 1 で，$n+1$ 回目に 1 が出る。

[2] n 回までの目の積の一の位が 7 で，$n+1$ 回目に 3 が出る。

よって　$p_{n+1}(1)=\dfrac{1}{6}p_n(1)+\dfrac{1}{6}p_n(7)$

(3) n 回投げて j が「1 または 3 または 7 または 9」すなわち「5 以外の奇数」となるのは，n 回とも 2，4，5，6 以外の目が出る場合，すなわち n 回とも 1 または 3 が出る場合である。

よって　$p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)=\left(\dfrac{2}{6}\right)^n=\dfrac{1}{3^n}$

(4) n 回投げて $j=5$ となる確率は，j が奇数となる確率から $j=1,\ 3,\ 7,\ 9$ となる確率を引いたものである。

よって，求める確率 $p_n(5)$ は，n 回とも奇数が出る確率から (3) の確率を引いたもので

$$p_n(5)=\left(\frac{3}{6}\right)^n-\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}$$

4 ●[文211]接する放物線と円. 円弧, 放物線, x軸で囲まれた面積[2009 数学ⅠⅡＡＢ(文理)211]

放物線 $y=ax^2$ $(a>0)$ と円 $(x-b)^2+(y-1)^2=1$ $(b>0)$ が，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ で接しているとする。ただし，$0<p<b$ とする。この円の中心 Q から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点を R としたとき，$\angle\mathrm{PQR}=120^\circ$ であるとする。ここで，放物線と円が点 P で接するとは，P が放物線と円の共有点であり，かつ点 P における放物線の接線と点 P における円の接線が一致することである。

(1)　a，b の値を求めよ。

(2)　点 P と点 R を結ぶ短い方の弧と x 軸，および放物線で囲まれた部分の面積を求めよ。

解説

(1)　$\mathrm{P}(p,\ q)$，$\mathrm{Q}(b,\ 1)$，$\mathrm{R}(b,\ 0)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(p-b,\ q-1),\ \overrightarrow{\mathrm{QR}}=(0,\ -1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ のなす角は 120° であるから　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=|\overrightarrow{\mathrm{QP}}||\overrightarrow{\mathrm{QR}}|\cos 120^\circ$

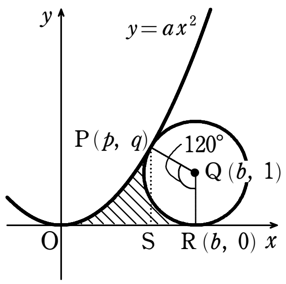
よって　$(p-b)\cdot 0+(q-1)\cdot(-1)=1\cdot 1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)$　　ゆえに　$q=\dfrac{3}{2}$

$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|^2=1$ であるから　$(p-b)^2+\left(\dfrac{3}{2}-1\right)^2=1$

よって　$(p-b)^2=\dfrac{3}{4}$

$b-p>0$ より　$b-p=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ゆえに　$b=p+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　…… ①



直線 PQ の傾きは　$\dfrac{q-1}{p-b}=\dfrac{\dfrac{3}{2}-1}{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって，放物線 $y=ax^2$ の点 P における接線の傾きは $\sqrt{3}$ であり，$y'=2ax$ であるから

$2ap=\sqrt{3}$

したがって　$ap=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　…… ②

点 P は放物線 $y=ax^2$ 上にあるから　$q=ap^2$　すなわち　$\dfrac{3}{2}=ap\cdot p$

② を代入して　$\dfrac{3}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}p$　　ゆえに　$p=\sqrt{3}$

$p=\sqrt{3}$ と ②，① から　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

(2)　P から x 軸に下ろした垂線と x 軸の交点を S とすると，求める面積は

$$\int_0^p ax^2dx+(\text{台形 PQRS の面積})-(\text{扇形 QPR の面積})$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{2}x^2dx+\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\pi\cdot 1^2\times\frac{1}{3}$$

$$=\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^{\sqrt{3}}+\frac{5\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{3}=\frac{9\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{3}$$

5 ○ベクトルの大きさ・内積の条件から四面体の体積を求める[2009]

空間のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(a,\ b,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が，条件 $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{3}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{5}{6}$ を満たしているとする。ただし，a，b は正の数とする。

(1)　a，b の値を求めよ。　　(2)　三角形 OAB の面積 S を求めよ。

(3)　四面体 OABC の体積 V を求めよ。

解説

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$ から　$a^2+b^2=1$　…… ①

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{3}$ から　$a=\dfrac{1}{3}$　…… ②

①，② から　$b^2=1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{8}{9}$　　$b>0$ であるから　$b=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$

(1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3},\ 0\right)$

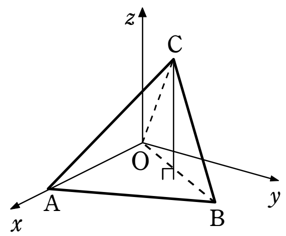
よって　$S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

別解　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{3}$ であるから

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{1^2\cdot 1^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(p,\ q,\ r)$ とおく。



$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ から　$p^2+q^2+r^2=1$　…… ③

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{2}$ から　$p=\dfrac{1}{2}$　…… ④

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{5}{6}$ から　$\dfrac{1}{3}p+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}q=\dfrac{5}{6}$　…… ⑤

③，④，⑤ から　$q=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$r=\pm\dfrac{1}{2}$

△OAB は xy 平面上にあるから　$V=\dfrac{1}{3}S|r|=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{18}$

6 ●[3C57]円と双曲線が接する条件(2)，正三角形ができる条件 [2009 数学ⅢＣ57]

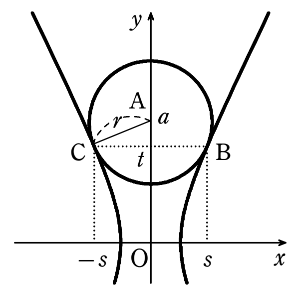
$a>0$，$b>0$ とする。点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を中心とする半径 r の円が，双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と 2 点 $\mathrm{B}(s,\ t)$，$\mathrm{C}(-s,\ t)$ で接しているとする。ただし，$s>0$ とする。ここで，双曲線と円が点 P で接するとは，P が双曲線と円の共有点であり，かつ点 P における双曲線の接線と点 P における円の接線が一致することである。

(1)　r，s，t を，a と b を用いて表せ。

(2)　△ABC が正三角形となる a と r が存在するような b の値の範囲を求めよ。

解説

(1)　[解 1]　点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を中心とする半径 r の円の方程式は



$$x^2+(y-a)^2=r^2$$

両辺を x で微分すると

$$2x+2(y-a)\frac{dy}{dx}=0$$

$y\neq a$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y-a}$$

また，$x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の両辺を x で微分すると　$2x-\dfrac{2y}{b^2}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

$y\neq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b^2x}{y}$

双曲線と円が点 $\mathrm{B}(s,\ t)$ で接するので

$s^2+(t-a)^2=r^2$　…… ①

$s^2-\dfrac{t^2}{b^2}=1$　…… ②

$-\dfrac{s}{t-a}=\dfrac{b^2s}{t}$　…… ③

$s\neq 0$ であるから ③ より　$-t=b^2(t-a)$

よって　$t=\dfrac{ab^2}{1+b^2}$　…… ④

②，④ から　$s^2=1+\dfrac{a^2b^2}{(1+b^2)^2}$

$s>0$ であるから　$s=\sqrt{1+\dfrac{a^2b^2}{(1+b^2)^2}}$　…… ⑤

①，④，⑤ から

$$r^2=1+\frac{a^2b^2}{(1+b^2)^2}+\frac{a^2}{(1+b^2)^2}=\frac{1+a^2+b^2}{1+b^2}$$

$r>0$ であるから　$r=\sqrt{\dfrac{1+a^2+b^2}{1+b^2}}$

[解 2]　$\mathrm{B}(s,\ t)$ における双曲線の接線の方程式は

$$sx-\frac{ty}{b^2}=1$$

よって，$\mathrm{B}(s,\ t)$ における法線の方程式は

$$\frac{t}{b^2}(x-s)+s(y-t)=0$$

この法線が円の中心 A $(0,\ a)$ を通るから

$$-\frac{st}{b^2}+s(a-t)=0$$

$s \neq 0$ であるから　　$-t+b^2(a-t)=0$

よって　　$t=\dfrac{ab^2}{1+b^2}$

$(s,\ t)$ は双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上にあるから

$$s^2-\frac{t^2}{b^2}=1$$

$s>0$ であるから　　$s=\sqrt{1+\dfrac{t^2}{b^2}}=\sqrt{1+\dfrac{a^2b^2}{(1+b^2)^2}}$

2 点 A，B の距離が円の半径 r に等しいので

$$r^2=s^2+(t-a)^2=1+\frac{a^2b^2}{(1+b^2)^2}+\left(\frac{ab^2}{1+b^2}-a\right)^2$$

$$=1+\frac{a^2b^2}{(1+b^2)^2}+\frac{a^2}{(1+b^2)^2}=1+\frac{a^2}{1+b^2}=\frac{1+a^2+b^2}{1+b^2}$$

$r>0$ であるから　　$r=\sqrt{\dfrac{1+a^2+b^2}{1+b^2}}$

(2)　AB＝AC は常に成り立つから，△ABC が正三角形となる条件は AB＝BC が成り立つことである。

よって　　$r=2s$　　$s>0,\ r>0$ より　　$r^2=4s^2$

(1) の結果を代入して　$\dfrac{1+a^2+b^2}{1+b^2}=4\left\{1+\dfrac{a^2b^2}{(1+b^2)^2}\right\}$

分母を払って　　$(1+b^2)(1+a^2+b^2)=4\{(1+b^2)^2+a^2b^2\}$

a について整理すると　　$(1-3b^2)a^2=3(1+b^2)^2$

この式を満たすような正の実数 a が存在するためには

$3(1+b^2)^2>0$ であるから　　$1-3b^2>0$

これを解いて　　$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<b<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$b>0$ であるから　　$0<b<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

このとき (1) の結果から r も存在する。

したがって，求める b の値の範囲は　　$0<b<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\boxed{7}$ ●［3C116］定積分で表された関数の微分，グラフ［2009　数学ⅢＣ116］

関数 $f(x)$ と $g(\theta)$ を

$$f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-t^2}\,dt\ \ (-1 \leqq x \leqq 1)$$

$$g(\theta)=f(\cos\theta)-f(\sin\theta)\ \ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

で定める。

(1)　導関数 $g'(\theta)$ を求めよ。

(2)　$g(\theta)$ を求めよ。

(3)　$y=g(\theta)$ のグラフをかけ。

解説

(1)　$f(x)=\displaystyle\int_{-1}^{x}\sqrt{1-t^2}\,dt$ から　　$f'(x)=\sqrt{1-x^2}$

よって　　$g'(\theta)=f'(\cos\theta)\cdot(\cos\theta)'-f'(\sin\theta)\cdot(\sin\theta)'$

$$=\sqrt{1-\cos^2\theta}\cdot(-\sin\theta)-\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta$$

$$=-|\sin\theta|\sin\theta-|\cos\theta|\cos\theta$$

ゆえに

$0<\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき　　$g'(\theta)=-\sin^2\theta-\cos^2\theta=-1$

$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ のとき　　$g'(\theta)=-\sin^2\theta+\cos^2\theta=\cos 2\theta$

$\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ のとき　　$g'(\theta)=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\dfrac{3}{2}\pi \leqq \theta<2\pi$ のとき　$g'(\theta)=\sin^2\theta-\cos^2\theta=-\cos 2\theta$

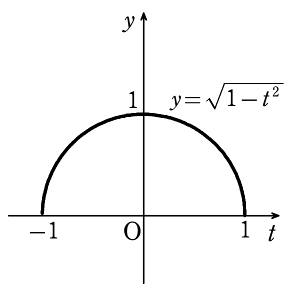
(2)　[1]　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$g'(\theta)=-1$ から　　$g(\theta)=-\theta+C_1$（C_1 は積分定数）　……①

ここで　　$g(0)=f(1)-f(0)$

$f(1)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt$ であり，$\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt$ は

半径 1 の半円の面積を表すから　　$f(1)=\dfrac{\pi}{2}$



また，$f(0)=\displaystyle\int_{-1}^{0}\sqrt{1-t^2}\,dt$ であり，

$\displaystyle\int_{-1}^{0}\sqrt{1-t^2}\,dt$ は半径 1 の四分円の面積を表すから

$$f(0)=\frac{\pi}{4}$$

ゆえに　　$g(0)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$

① より　　$g(0)=C_1$　　ゆえに　　$C_1=\dfrac{\pi}{4}$

したがって　　$g(\theta)=-\theta+\dfrac{\pi}{4}$

[2]　$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ のとき

$g'(\theta)=\cos 2\theta$ から　　$g(\theta)=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta+C_2$（$C_2$ は積分定数）　……②

ここで　　$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f(0)-f(1)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{2}=-\dfrac{\pi}{4}$

② より　　$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=C_2$　　ゆえに　　$C_2=-\dfrac{\pi}{4}$

したがって　　$g(\theta)=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta-\dfrac{\pi}{4}$

[3]　$\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ のとき

$g'(\theta)=1$ から　　$g(\theta)=\theta+C_3$（C_3 は積分定数）　……③

ここで　　$g(\pi)=f(-1)-f(0)$

$$f(-1)=\int_{-1}^{-1}\sqrt{1-t^2}\,dt=0$$

であるから　　$g(\pi)=0-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{4}$

③ より　　$g(\pi)=\pi+C_3$　　$\pi+C_3=-\dfrac{\pi}{4}$ から　　$C_3=-\dfrac{5}{4}\pi$

したがって　　$g(\theta)=\theta-\dfrac{5}{4}\pi$

[4]　$\dfrac{3}{2}\pi \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき

$g'(\theta)=-\cos 2\theta$ から　　$g(\theta)=-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta+C_4$（$C_4$ は積分定数）　……④

ここで　　$g\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=f(0)-f(-1)=\dfrac{\pi}{4}-0=\dfrac{\pi}{4}$

④ より　　$g\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=C_4$　　ゆえに　　$C_4=\dfrac{\pi}{4}$

したがって　　$g(\theta)=-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta+\dfrac{\pi}{4}$

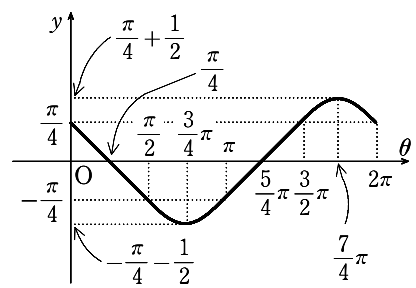
[1]～[4] から　　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき　　$g(\theta)=-\theta+\dfrac{\pi}{4}$

$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ のとき　　$g(\theta)=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta-\dfrac{\pi}{4}$

$\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ のとき　　$g(\theta)=\theta-\dfrac{5}{4}\pi$

$\dfrac{3}{2}\pi \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき　$g(\theta)=-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta+\dfrac{\pi}{4}$

(3)　(2) から $y=g(\theta)$ のグラフは，右の図のようになる。



$\boxed{8}$ ●[3C196]行列Aによる点列の決定[2009 数学ⅢC 196]

行列 $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}$ に対して，座標空間の点 P_n の座標 $(a_n,\ b_n,\ c_n)$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を，$(a_1,\ b_1,\ c_1)=(1,\ 0,\ 0)$，$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$，

$c_{n+1}=c_n+\sqrt{a_nb_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定める。

(1)　A^3 を求めよ。

(2)　点 P_2，P_3，P_4 の座標を求めよ。

(3)　点 P_n の座標を求めよ。

解説

(1)　$A^2=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-1 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

(2)　$\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ から　$a_2=0,\ b_2=\frac{1}{2}$

また　$c_2=c_1+\sqrt{a_1b_1}=0$　よって　$\mathrm{P}_2\left(0,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$

$\begin{pmatrix}a_3\\b_3\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ から　$a_3=b_3=-\frac{1}{4}$

また　$c_3=c_2+\sqrt{a_2b_2}=0$　よって　$\mathrm{P}_3\left(-\frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ 0\right)$

$\begin{pmatrix}a_4\\b_4\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_3\\b_3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ から　$a_4=\frac{1}{8},\ b_4=0$

また　$c_4=c_3+\sqrt{a_3b_3}=\frac{1}{4}$　よって　$\mathrm{P}_4\left(\frac{1}{8},\ 0,\ \frac{1}{4}\right)$

(3)　$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$ を繰り返し用いて

$$\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_{n-1}\\b_{n-1}\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}a_{n-2}\\b_{n-2}\end{pmatrix}=\cdots\cdots=A^{n-1}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}$$

ただし，$A^0=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ とする。

(1) より，$A^3=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ であるから，k を 0 以上の整数とすると

$$A^{3k}=(A^3)^k=\frac{1}{8^k}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

よって，[1]　$n=3k+1$ のとき

$$\begin{pmatrix}a_{3k+1}\\b_{3k+1}\end{pmatrix}=A^{3k}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}=\frac{1}{8^k}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{8^k}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

[2]　$n=3k+2$ のとき

$$\begin{pmatrix}a_{3k+2}\\b_{3k+2}\end{pmatrix}=A^{3k+1}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}=A^{3k}A\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}=\frac{1}{8^k}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{8^k}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

[3]　$n=3k+3$ のとき

$$\begin{pmatrix}a_{3k+3}\\b_{3k+3}\end{pmatrix}=A^{3k+2}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}=A^{3k}A^2\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}=\frac{1}{8^k}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\frac{1}{4\cdot 8^k}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

したがって　$\sqrt{a_{3k+1}b_{3k+1}}=0$，$\sqrt{a_{3k+2}b_{3k+2}}=0$，$\sqrt{a_{3k+3}b_{3k+3}}=\frac{1}{4\cdot 8^k}$

$n\geqq 2$ のとき　$c_n=c_1+\sum_{l=1}^{n-1}\sqrt{a_lb_l}=\sum_{l=1}^{n-1}\sqrt{a_lb_l}$ であるから，$k\geqq 1$ のとき

$$c_{3k+1}=\sum_{l=1}^{3k}\sqrt{a_lb_l}=\sum_{m=1}^{k}\left(\sqrt{a_{3m-2}b_{3m-2}}+\sqrt{a_{3m-1}b_{3m-1}}+\sqrt{a_{3m}b_{3m}}\right)$$

$$=\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{4\cdot 8^{m-1}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^k}{1-\frac{1}{8}}=\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^k\right\}$$

これは，$k=0$ のときも成り立つ。

$$c_{3k+2}=c_{3k+1}+\sqrt{a_{3k+1}b_{3k+1}}=c_{3k+1}=\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^k\right\}$$

$$c_{3k+3}=c_{3k+2}+\sqrt{a_{3k+2}b_{3k+2}}=c_{3k+2}=\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^k\right\}$$

$n=3k+1$ のとき　$8^k=2^{3k}=2^{n-1}$

$n=3k+2$ のとき　$8^k=2^{3k}=2^{n-2}$

$n=3k+3$ のとき　$8^k=2^{3k}=2^{n-3}$

したがって，k を 0 以上の整数とすると

$n=3k+1$ のとき　$\mathrm{P}_n\left(\frac{1}{2^{n-1}},\ 0,\ \frac{2}{7}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\right)$

$n=3k+2$ のとき　$\mathrm{P}_n\left(0,\ \frac{1}{2^{n-1}},\ \frac{2}{7}\left(1-\frac{1}{2^{n-2}}\right)\right)$

$n=3k+3$ のとき　$\mathrm{P}_n\left(-\frac{1}{2^{n-1}},\ -\frac{1}{2^{n-1}},\ \frac{2}{7}\left(1-\frac{1}{2^{n-3}}\right)\right)$