1 ●[理64]y=ax^2+bxのグラフ上に無限個の格子点が存在する証明[2010 数学ⅠⅡＡＢ(理)64]

xy 平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点とよぶ。

(1)　$y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{2}x$ のグラフ上に無限個の格子点が存在することを示せ。

(2)　a，b は実数で $a\neq 0$ とする。$y=ax^2+bx$ のグラフ上に，点 $(0,\ 0)$ 以外に格子点が2つ存在すれば，無限個存在することを示せ。

解説

(1)　$y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{2}x$　……① とする。

$x=6k$ (kは整数) とすると

$$y=\frac{1}{3}\cdot(6k)^2+\frac{1}{2}\cdot 6k=12k^2+3k$$

kは整数であるから，yも整数となる。

よって，点 $(6k,\ 12k^2+3k)$ は ① のグラフ上の格子点であり，整数 kは無限に存在するから，① のグラフ上に無限個の格子点が存在する。

(2)　$y=ax^2+bx$ のグラフ上に格子点

$$(p_1,\ q_1),\ (p_2,\ q_2)\ (p_1\neq 0,\ p_2\neq 0,\ p_1\neq p_2)$$

が存在すると仮定する。

このとき，次の等式が成り立つ。

$$ap_1{}^2+bp_1=q_1 \quad ……②,\qquad ap_2{}^2+bp_2=q_2 \quad ……③$$

② と ③ を連立して解くと，$p_1p_2(p_1-p_2)\neq 0$ であるから

$$a=\frac{p_2q_1-p_1q_2}{p_1p_2(p_1-p_2)},\quad b=\frac{p_1{}^2q_2-p_2{}^2q_1}{p_1p_2(p_1-p_2)}$$

p_1，q_1，p_2，q_2 は整数であるから，a，b はともに有理数である。

ここで，$a=\dfrac{m}{l}$（lと m はともに0でない整数)，$b=\dfrac{q}{p}$ (p，qは整数，$p\neq 0$) とおくと，$y=\dfrac{m}{l}x^2+\dfrac{q}{p}x$ となる。

よって，$x=lpk$ (kは整数) とすると $y=mlp^2k^2+qlk$ となり，yも整数となる。

このような xは無限に存在するから，$y=ax^2+bx$ のグラフ上に格子点は無限個存在する。

2 ●[文102]A,B,Cの玉を交換する操作n回.赤玉をもっている確率[2010 数学ⅠⅡＡＢ(文理)102]

はじめに，A が赤玉を1個，B が白玉を1個，C が青玉を1個もっている。表裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の硬貨を投げ，表が出れば A と B の玉を交換し，裏が出れば B と C の玉を交換する，という操作を考える。この操作を n 回 ($n=1,\ 2,\ 3,\ ……$) 繰り返した後に A，B，C が赤玉をもっている確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とおく。

(1)　a_1，b_1，c_1，a_2，b_2，c_2 を求めよ。

(2)　a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n で表せ。

(3)　n が奇数ならば $a_n=b_n>c_n$ が成り立ち，n が偶数ならば $a_n>b_n=c_n$ が成り立つことを示せ。

(4)　b_n を求めよ。

解説

(1)　2回の操作による A，B，C の玉の移動は，次のようになる。

(A，B，C)＝(赤，白，青)
- 表 → (白，赤，青)
  - 表 → (赤，白，青)
  - 裏 → (白，青，赤)
- 裏 → (赤，青，白)
  - 表 → (青，赤，白)
  - 裏 → (赤，白，青)

よって　$a_1=\dfrac{1}{2}$，$b_1=\dfrac{1}{2}$，$c_1=0$

$$a_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\quad b_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4},\quad c_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

(2)　A が赤玉をもっているとき，赤玉は，表が出れば B に，裏が出れば A のままである。

B が赤玉をもっているとき，赤玉は，表が出れば A に，裏が出れば C にある。

C が赤玉をもっているとき，赤玉は，表が出れば C のままで，裏が出れば B にある。

よって　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}b_n$，　$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}c_n$，

$c_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n+\dfrac{1}{2}c_n$

(3)　「n が奇数ならば $a_n=b_n>c_n$，n が偶数ならば $a_n>b_n=c_n$」を ① とする。

すべての自然数 n について，① が成り立つことを数学的帰納法で証明する。

[1]　$n=1,\ 2$ のとき

(1) から　$a_1=b_1>c_1$，　$a_2>b_2=c_2$

よって，$n=1,\ 2$ のとき ① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

k が奇数ならば $a_k=b_k>c_k$，k が偶数ならば $a_k>b_k=c_k$

が成り立つと仮定する。

(2) で求めた漸化式により

$$a_{k+1}=\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{2}b_k,\quad b_{k+1}=\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{2}c_k,\quad c_{k+1}=\frac{1}{2}b_k+\frac{1}{2}c_k$$

k が奇数ならば $a_k=b_k>c_k$ であるから

$$\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{2}b_k>\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{2}c_k,\quad c_{k+1}=\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{2}c_k$$

よって　$a_{k+1}>b_{k+1}=c_{k+1}$　($k+1$ は偶数)

k が偶数ならば $a_k>b_k=c_k$ であるから

$$a_{k+1}=\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{2}c_k,\quad \frac{1}{2}a_k+\frac{1}{2}c_k>\frac{1}{2}b_k+\frac{1}{2}c_k$$

よって　$a_{k+1}=b_{k+1}>c_{k+1}$　($k+1$ は奇数)

したがって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] より，① はすべての自然数 n について成り立つ。

(4)　操作を n 回繰り返した後に，A，B，C のいずれかが赤玉をもっているので，

$$a_n+b_n+c_n=1$$

である。よって　$a_n+c_n=1-b_n$

(2) の漸化式から　$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+c_n)=\dfrac{1}{2}(1-b_n)$

よって　$b_{n+1}=-\dfrac{1}{2}b_n+\dfrac{1}{2}$

変形すると　$b_{n+1}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(b_n-\dfrac{1}{3}\right)$

また　$b_1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$

よって，数列 $\left\{b_n-\dfrac{1}{3}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{6}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

したがって　$b_n=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$

3 ●[理97]硬貨の裏表と赤玉, 白玉, 青玉の交換. 赤玉を持つ確率[2010 数学ⅠⅡAB(理)97]

初めに，A が赤玉を 1 個，B が白玉を 1 個，C が青玉を 1 個持っている。表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ の硬貨を投げ，表が出れば A と B の玉を交換し，裏が出れば B と C の玉を交換する，という操作を考える。この操作を n 回 ($n=1$，2，3，……) 繰り返した後に A，B，C が赤玉を持っている確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とおく。

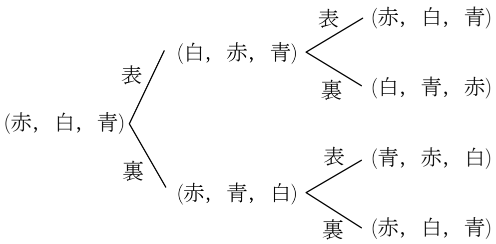
(1) a_1，b_1，c_1，a_2，b_2，c_2 を求めよ。

(2) a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n で表せ。

(3) a_n，b_n，c_n を求めよ。

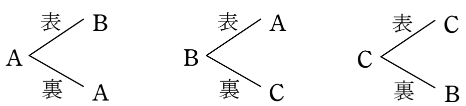
解説

(1) A，B，C が持っている玉の状態を，A，B，C の順に (○，△，□) と表すことにすると，2 回の操作による A，B，C の玉の移動は，次のようになる。



したがって　$a_1=\frac{1}{2}$，$b_1=\frac{1}{2}$，$c_1=0$，$a_2=\frac{1}{2}$，$b_2=\frac{1}{4}$，$c_2=\frac{1}{4}$

(2) A，B，C が赤玉を持っているとき，硬貨の表裏の出方によって，赤玉の移動は次のようになる。



したがって　$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n$，$b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}c_n$，$c_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n$

(3) 操作を n 回繰り返した後，A，B，C のいずれかが赤玉を持っているから，$a_n+b_n+c_n=1$ である。

(2) から　$b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+c_n)=\frac{1}{2}(1-b_n)$

ゆえに　$b_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(b_n-\frac{1}{3}\right)$

数列 $\left\{b_n-\frac{1}{3}\right\}$ は，初項 $b_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$　よって　$$b_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

次に，$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n$ …… ①

$c_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n$ …… ②

とする。

① − ② から　$a_{n+1}-c_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n-c_n)$

数列 $\{a_n-c_n\}$ は，初項 $a_1-c_1=\frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n-c_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \cdots\cdots ③$$

また，$b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+c_n)$ から　$a_n+c_n=2b_{n+1}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ …… ④

(③ + ④) ÷ 2 から　$a_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

(④ − ③) ÷ 2 から　$c_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$\boxed{4}$ ●［文140］長方形が領域（円の内部）に含まれる条件の図示［2010 数学ⅠⅡＡＢ（文理）140］

xy 平面上の長方形 ABCD が次の条件(A)，(B)，(C)を満たしているとする。

(A)　対角線 AC と BD の交点は原点 O に一致する。

(B)　直線 AB の傾きは 2 である。

(C)　A の y 座標は，B，C，D の y 座標より大きい。

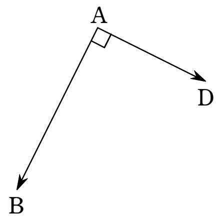
このとき，$a>0$，$b>0$ として，辺 AB の長さを $2\sqrt{5}\,a$，BC の長さを $2\sqrt{5}\,b$ とおく。

(1)　A，B，C，D の座標を a，b で表せ。

(2)　長方形 ABCD が領域 $x^2+(y-5)^2\leqq 100$ に含まれるための a，b に対する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。

(解説)

(1)　直線 AB の傾きは 2 で，B の y 座標は A の y 座標より小さいから，$\overrightarrow{m_1}=(-1,\ -2)$ とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{\overrightarrow{m_1}}{|\overrightarrow{m_1}|}\times \mathrm{AB}=\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,\ -2)\times 2\sqrt{5}\,a$$

$$=(-2a,\ -4a)$$

直線 AD は直線 AB に垂直な直線で，傾きは $-\dfrac{1}{2}$ である。

点 D の y 座標は A の y 座標より小さいから，$\overrightarrow{m_2}=(2,\ -1)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{\overrightarrow{m_2}}{|\overrightarrow{m_2}|}\times \mathrm{AD}=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,\ -1)\times 2\sqrt{5}\,b=(4b,\ -2b)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(p,\ q)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(p,\ q)+(-2a,\ -4a)=(p-2a,\ q-4a)\quad\cdots\cdots ①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(p,\ q)+(4b,\ -2b)=(p+4b,\ q-2b)\quad\cdots\cdots ②$$

長方形の対角線 AC と BD の交点はそれぞれの中点であり，それが原点 O と一致するから

$$\frac{(p-2a)+(p+4b)}{2}=0,\quad \frac{(q-4a)+(q-2b)}{2}=0$$

よって　　$p=a-2b$，$q=2a+b$

これを①，②に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-a-2b,\ -2a+b),\ \overrightarrow{\mathrm{OD}}=(a+2b,\ 2a-b)$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-p,\ -q)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(-a+2b,\ -2a-b)$$

したがって　　$\mathrm{A}\,(a-2b,\ 2a+b)$，$\mathrm{B}\,(-a-2b,\ -2a+b)$，

$\mathrm{C}\,(-a+2b,\ -2a-b)$，$\mathrm{D}\,(a+2b,\ 2a-b)$

(2)　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{OD}=\sqrt{5(a^2+b^2)}$

であるから，長方形 ABCD は，円 $x^2+y^2=5(a^2+b^2)$ に内接している。

また，領域 $x^2+(y-5)^2\leqq 100$ は，中心 $(0,\ 5)$，半径 10 の円の内部および周上である。

よって，2 点 B，C が領域に含まれればよい。

$(-a-2b)^2+(-2a+b-5)^2\leqq 100$ から　　$(a+2)^2+(b-1)^2\leqq 20\quad\cdots\cdots ③$

$(-a+2b)^2+(-2a-b-5)^2\leqq 100$ から　　$(a+2)^2+(b+1)^2\leqq 20\quad\cdots\cdots ④$

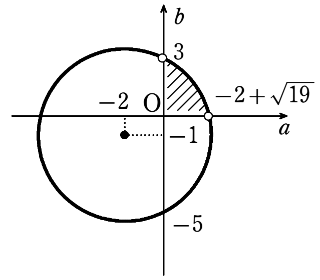
$a>0$，$b>0$ で，③ かつ ④ であるから　　$(a+2)^2+(b+1)^2\leqq 20$

ゆえに

$a>0$ かつ $b>0$ かつ $(a+2)^2+(b+1)^2\leqq 20$

したがって，領域は右の図の斜線部分である。

ただし，境界線は a 軸，b 軸は含まず他は含む。



$\boxed{5}$ ●[文205]3次曲線とy=f(x)(区間で式異なる)が4交点をもつ条件[2010 数学ⅠⅡＡＢ(文理)205]

関数 $f(x)$ を　$f(x)=\begin{cases}1 & (x\geqq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$　により定める。

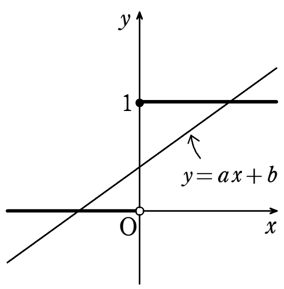
(1)　a，b は実数とする。$y=ax+b$ のグラフと $y=f(x)$ のグラフがちょうど 2 つの交点をもつための a，b に対する条件を求めよ。

(2)　p，q は実数で $p>0$ とする。$y=x^3+6px^2+9p^2x+q$ のグラフと $y=f(x)$ のグラフがちょうど 4 つの交点をもつための p，q に対する条件を求め，pq 平面上に図示せよ。

(解説)

(1)　$a=0$ のとき，$y=ax+b$ のグラフは x 軸に平行な直線であり，$y=f(x)$ のグラフとは無数の共有点をもつか，共有点がないかのどちらかである。

よって，$a=0$ は不適。



$a\neq 0$ のとき，$y=ax+b$ から　$x=\dfrac{y-b}{a}$

このグラフと $y=f(x)$ のグラフが 2 つの交点をもつ条件は

「$y=0$ のとき　$x<0$」 かつ 「$y=1$ のとき　$x\geqq 0$」

すなわち　$-\dfrac{b}{a}<0$　かつ　$\dfrac{1-b}{a}\geqq 0$　……①

$a>0$ のとき，① から　$-b<0$　かつ　$1-b\geqq 0$

$\iff$　$b>0$　かつ　$b\leqq 1$　　よって　$0<b\leqq 1$

$a<0$ のとき，① から　$b<0$　かつ　$1-b\leqq 0$

$\iff$　$b<0$　かつ　$1\leqq b$　　これを満たす b は存在しない。

以上から，求める条件は　$a>0$　かつ　$0<b\leqq 1$

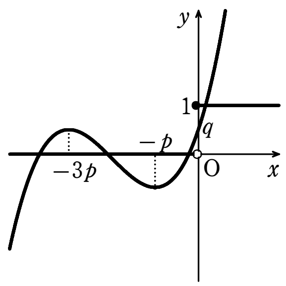
(2)　$g(x)=x^3+6px^2+9p^2x+q$ とおくと

$g'(x)=3x^2+12px+9p^2=3(x+p)(x+3p)$

$g'(x)=0$ とすると　$x=-p$，$-3p$

$p>0$ であるから，$g(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-3p$	$\cdots$	$-p$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	q	↘	$q-4p^3$	↗



よって，$y=g(x)$ のグラフと $y=f(x)$ のグラフがちょうど 4 つの交点をもつとき，グラフは右の図のようになる。

したがって，求める条件は

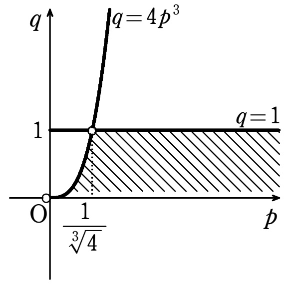
$g(-3p)>0$ かつ $g(-p)<0$ かつ $0<q\leqq 1$

すなわち

$q<4p^3$ かつ $0<q\leqq 1$

pq 平面上に図示すると，右の図の斜線部分である。

ただし，境界線は $q=1$ かつ $p>\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ のみを含み，他は含まない。



6 ●[3C73]四面体OKLPの体積の最大値，最小値[2010 数学ⅢC 73]

座標空間に 8 点

O(0, 0, 0), P(1, 0, 0), Q(1, 1, 0), R(0, 1, 0),

A(0, 0, 1), B(1, 0, 1), C(1, 1, 1), D(0, 1, 1)

をとり，線分 BC の中点を M とする。線分 RD 上の点を N(0, 1, t) とし，3 点 O，M，N を通る平面と線分 PD および線分 PB との交点をそれぞれ K，L とする。

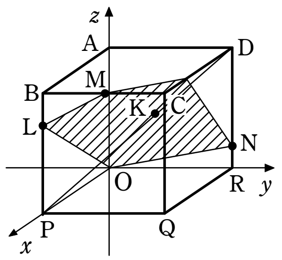
(1) K の座標を t で表せ。

(2) 四面体 OKLP の体積を $V(t)$ とする。N が線分 RD 上を R から D まで動くとき，$V(t)$ の最大値と最小値およびそれらを与える t の値をそれぞれ求めよ。

解説

(1) 点 K は 3 点 O，M，N を通る平面上にあるから，

$\overrightarrow{OK}=x\overrightarrow{OM}+y\overrightarrow{ON}$ (x，y は実数) とおける。



$\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}=\left(1,\ \dfrac{1}{2},\ 1\right)$，$\overrightarrow{ON}=(0,\ 1,\ t)$ である

から　$\overrightarrow{OK}=x\left(1,\ \dfrac{1}{2},\ 1\right)+y(0,\ 1,\ t)$

$=\left(x,\ \dfrac{1}{2}x+y,\ x+ty\right)$ ……①

また，点 K は PD 上にあるから，$\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OP}+s\overrightarrow{PD}$ $(0\leqq s\leqq 1)$ とおける。

$\overrightarrow{PD}=(-1,\ 1,\ 1)$ であるから

$\overrightarrow{OK}=(1,\ 0,\ 0)+s(-1,\ 1,\ 1)=(1-s,\ s,\ s)$ ……②

①，② から　$x=1-s$，$\dfrac{1}{2}x+y=s$，$x+ty=s$

これから s を求めると　$s=\dfrac{2-t}{4-3t}$　（ここで，$0\leqq t\leqq 1$ より $4-3t\neq 0$ である）

ゆえに，② から　$\overrightarrow{OK}=\left(\dfrac{2-2t}{4-3t},\ \dfrac{2-t}{4-3t},\ \dfrac{2-t}{4-3t}\right)$

したがって，点 K の座標は　$\left(\dfrac{2-2t}{4-3t},\ \dfrac{2-t}{4-3t},\ \dfrac{2-t}{4-3t}\right)$

(2) 点 L は 3 点 O，M，N を通る平面上にあるから，$\overrightarrow{OL}=u\overrightarrow{OM}+v\overrightarrow{ON}$ (u，v は実数) とおける。

よって　$\overrightarrow{OL}=\left(u,\ \dfrac{1}{2}u+v,\ u+tv\right)$ ……③

また，点 L は線分 PB 上の点であるから，点 L の x座標，y座標はそれぞれ 1，0 である。

ゆえに，③ から　$u=1$，$\dfrac{1}{2}u+v=0$　すなわち　$u=1$，$v=-\dfrac{1}{2}$

したがって，③ から，点 L の座標は　$\left(1,\ 0,\ 1-\dfrac{1}{2}t\right)$

四面体 OKLP の底面を △OLP とみると，高さは点 K の y座標に等しい。

よって　$V(t)=\dfrac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{OLP}\cdot\dfrac{2-t}{4-3t}=\dfrac{1}{3}\cdot\left\{\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(1-\dfrac{1}{2}t\right)\right\}\cdot\dfrac{2-t}{4-3t}$

$=\dfrac{(2-t)^2}{12(4-3t)}$

ゆえに　$V'(t)=\dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{2(2-t)\cdot(-1)\cdot(4-3t)-(2-t)^2\cdot(-3)}{(4-3t)^2}$

$=\dfrac{(2-t)(3t-2)}{12(4-3t)^2}$

$V'(t)=0$ とすると，$0\leqq t\leqq 1$ から　$t=\dfrac{2}{3}$

$0\leqq t\leqq 1$ における $V(t)$ の増減表は右のようになる。

t	0	…	$\dfrac{2}{3}$	…	1
$V'(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$	$\dfrac{1}{12}$	↘	$\dfrac{2}{27}$	↗	$\dfrac{1}{12}$

したがって，$V(t)$ は

$t=0$，1 のとき最大値 $\dfrac{1}{12}$，

$t=\dfrac{2}{3}$ のとき最小値 $\dfrac{2}{27}$

をとる。

$\boxed{7}$ ●[3C152]y=(x^2−x)e^−x, 接線, y軸で囲まれた図形の面積[2010 数学ⅢC152]

関数 $f(x)=(x^2-x)e^{-x}$ について，次の問いに答えよ。必要ならば，任意の自然数 n に対して $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-x}=0$ が成り立つことを用いてよい。

(1)　$y=f(x)$ のグラフの変曲点を求め，グラフの概形をかけ。

(2)　$a>0$ とする。点 $(0,\ a)$ を通る $y=f(x)$ のグラフの接線が1本だけ存在するような a の値を求めよ。また，a がその値をとるとき，$y=f(x)$ $(x\geqq 0)$ のグラフ，その接線および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

解説

(1)　$f(x)=(x^2-x)e^{-x}$ から

$$f'(x)=(2x-1)\cdot e^{-x}+(x^2-x)\cdot(-e^{-x})=-(x^2-3x+1)e^{-x}$$

$$f''(x)=-(2x-3)\cdot e^{-x}-(x^2-3x+1)\cdot(-e^{-x})=(x^2-5x+4)e^{-x}$$

$$=(x-1)(x-4)e^{-x}$$

$e^{-x}>0$ であるから，$f'(x)=0$ とすると　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$f''(x)=0$ とすると　$x=1,\ 4$

よって，$y=f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗	0	↗	極大	↘	$12e^{-4}$	↘

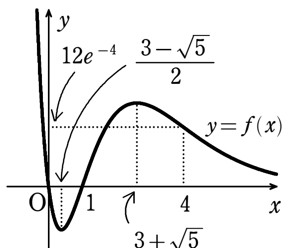
ゆえに，$y=f(x)$ のグラフの変曲点は

$(1,\ 0)$，　$(4,\ 12e^{-4})$

また　$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-x)e^{-x}=\infty$,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(x^2-x)e^{-x}=\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}\left(1-\frac{1}{x}\right)=0$$

よって，$y=f(x)$ のグラフの概形は，右の図のようになる。



(2)　接点の座標を $(t,\ f(t))$ とおくと，接線の方程式は

$$y-(t^2-t)e^{-t}=\{-(t^2-3t+1)e^{-t}\}(x-t)\ \cdots\cdots\ ①$$

これが点 $(0,\ a)$ を通るとき　$a-(t^2-t)e^{-t}=\{-(t^2-3t+1)e^{-t}\}(0-t)$

すなわち　$a=(t^3-2t^2)e^{-t}$ …… ②

ここで，(1) で求めたグラフの概形から，$y=f(x)$ のグラフでは，接点が異なると接線も異なることがわかる。

よって，点 $(0,\ a)$ を通る $y=f(x)$ のグラフの接線の本数は，t についての方程式 ② の実数解の個数と一致する。

ゆえに，$y=(t^3-2t^2)e^{-t}$ のグラフと直線 $y=a$ $(a>0)$ の共有点が1個だけ存在するような a の値を求めればよい。

$g(t)=(t^3-2t^2)e^{-t}$ とおくと

$$g'(t)=(3t^2-4t)e^{-t}+(t^3-2t^2)\cdot(-e^{-t})=-t(t^2-5t+4)e^{-t}$$

$$=-t(t-1)(t-4)e^{-t}$$

$g'(t)=0$ とすると　$t=0,\ 1,\ 4$

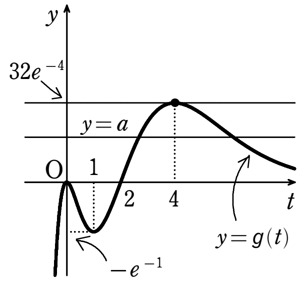
よって，$y=g(t)$ の増減表は次のようになる。

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	↗	0	↘	$-e^{-1}$	↗	$32e^{-4}$	↘

また，$\lim\limits_{t\to-\infty} g(t)=\lim\limits_{t\to-\infty}(t^3-2t^2)e^{-t}=-\infty$,

$$\lim_{t\to\infty} g(t)=\lim_{t\to\infty}(t^3-2t^2)e^{-t}=\lim_{t\to\infty}t^3e^{-t}\left(1-\frac{2}{t}\right)=0$$

よって，$y=g(t)$ のグラフの概形は，右の図のようになる。

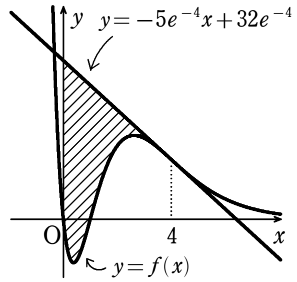


$y=g(t)$ のグラフと直線 $y=a$ $(a>0)$ の共有点が1個だけ存在するような a の値は　$a=32e^{-4}$

このとき，接点の x 座標 t の値は　$t=4$

接線の方程式は，① から　$y=-5e^{-4}x+32e^{-4}$

ゆえに，求める面積を S とすると，S は右の図の斜線部分の面積である。



よって

$$S=\int_0^4\{(-5e^{-4}x+32e^{-4})-(x^2-x)e^{-x}\}dx$$

$$=\left[-\frac{5e^{-4}}{2}x^2+32e^{-4}x\right]_0^4-\int_0^4(x^2-x)e^{-x}dx$$

$$=88e^{-4}-\int_0^4(x^2-x)e^{-x}dx$$

ここで　$-\int(x^2-x)e^{-x}dx=(x^2-x)e^{-x}-\int(2x-1)e^{-x}dx$

$$=(x^2-x)e^{-x}+(2x-1)e^{-x}-\int 2e^{-x}dx$$

$$=(x^2+x-1)e^{-x}-\int 2e^{-x}dx$$

$$=(x^2+x+1)e^{-x}+C$$　（C は積分定数）

ゆえに　$S=88e^{-4}+\Big[(x^2+x+1)e^{-x}\Big]_0^4=109e^{-4}-1$