$\boxed{1}$ ●[文91]取り出した玉の数字の合計に関する確率[2011 数学ⅠⅡＡＢ(文理)91]

数字の2を書いた玉が1個，数字の1を書いた玉が3個，数字の0を書いた玉が4個あり，これら合計8個の玉が袋に入っている。以下の(1)から(3)のそれぞれにおいて，この状態の袋から1度に1個ずつ玉を取り出し，取り出した玉は袋に戻さないものとする。

(1)　玉を2度取り出すとき，取り出した玉に書かれた数字の合計が2である確率を求めよ。

(2)　玉を4度取り出すとき，取り出した玉に書かれた数字の合計が4以下である確率を求めよ。

(3)　玉を8度取り出すとき，次の条件が満たされる確率を求めよ。

条件：すべての $n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 8$ に対して，1個目から n 個目までの玉に書かれた数字の合計は n 以下である。

解説

k 回目に取り出した玉に書かれている数字を x_k とおく。

(1)　玉を2度取り出すとき，取り出した玉に書かれた数字の合計が2であるのは，

$$(x_1,\ x_2)=(2,\ 0),\ (1,\ 1),\ (0,\ 2)$$

の場合である。

$(x_1,\ x_2)=(2,\ 0)$ となるのは　$1\times4=4$（通り）

$(x_1,\ x_2)=(1,\ 1)$ となるのは　$3\times2=6$（通り）

$(x_1,\ x_2)=(0,\ 2)$ となるのは　$4\times1=4$（通り）

よって，求める確率は　$\dfrac{4+6+4}{{}_8\mathrm{P}_2}=\dfrac{14}{56}=\dfrac{1}{4}$

(2)　玉を4度取り出すとき，取り出した玉に書かれた数字の合計が4より大きくなるのは，取り出した4個の玉が，2の玉1個と1の玉3個の場合である。

その場合の数は　$4!$ 通り

よって，求める確率は　$1-\dfrac{4!}{{}_8\mathrm{P}_4}=1-\dfrac{1}{70}=\dfrac{69}{70}$

(3)　条件が満たされないのは，次の[1]～[4]のいずれかの場合である。

[1]　$x_1=2$　　[2]　$x_1=1,\ x_2=2$　　[3]　$x_1=x_2=1,\ x_3=2$

[4]　$x_1=x_2=x_3=1,\ x_4=2$

[1]となる確率は　$\dfrac{1\times7!}{8!}=\dfrac{1}{8}$　　[2]となる確率は　$\dfrac{{}_3\mathrm{P}_1\times1\times6!}{8!}=\dfrac{3}{56}$

[3]となる確率は　$\dfrac{{}_3\mathrm{P}_2\times1\times5!}{8!}=\dfrac{1}{56}$　　[4]となる確率は　$\dfrac{3!\times1\times4!}{8!}=\dfrac{1}{280}$

よって，求める確率は　$1-\left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{56}+\dfrac{1}{56}+\dfrac{1}{280}\right)=1-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$

$\boxed{2}$ ●[文134]OP:AP:BP=1:a:bを満たすPが存在するa,bの条件[2011 数学ⅠⅡＡＢ(文理)134]

xy 平面上に3点 O$(0,\ 0)$，A$(1,\ 0)$，B$(0,\ 1)$ がある。

(1)　$a>0$ とする。OP：AP＝1：a を満たす点Pの軌跡を求めよ。

(2)　$a>1>b>0$ とする。OP：AP：BP＝1：a：b を満たす点Pが存在するための a，b に対する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。

解説

(1)　$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}=1:a \iff a\mathrm{OP}=\mathrm{AP} \iff a^2\mathrm{OP}^2=\mathrm{AP}^2$

よって，P$(x,\ y)$ とすると

$$a^2(x^2+y^2)=(x-1)^2+y^2$$

ゆえに　$(a^2-1)x^2+(a^2-1)y^2+2x-1=0$　……①

[1]　$a^2-1=0$ すなわち $a=1$ のとき

①から　$2x-1=0$　　よって　$x=\dfrac{1}{2}$

[2]　$a^2-1\neq0$ すなわち $a\neq1$ のとき

①から　$x^2+y^2+\dfrac{2}{a^2-1}x-\dfrac{1}{a^2-1}=0$

よって　$\left(x+\dfrac{1}{a^2-1}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{a}{a^2-1}\right)^2$　……②

[1]，[2]から，求める点Pの軌跡は

$a=1$ のとき　直線 $x=\dfrac{1}{2}$

$0<a<1,\ 1<a$ のとき　中心 $\left(-\dfrac{1}{a^2-1},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{a}{|a^2-1|}$ の円

(2)　OP：AP＝1：a $(a>1)$ を満たす点Pの軌跡は

中心 $\left(-\dfrac{1}{a^2-1},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{a}{a^2-1}$ の円　……③

OP：BP＝1：b $(0<b<1)$ を満たす点Pの軌跡は

中心 $\left(0,\ -\dfrac{1}{b^2-1}\right)$，半径 $\dfrac{b}{1-b^2}$ の円　……④

OP：AP：BP＝1：a：b $(a>1>b>0)$ を満たす点Pが存在するための条件は，円③と円④が共有点をもつことである。

よって，2つの円の半径と中心間の距離について

$$\left|\frac{a}{a^2-1}-\frac{b}{1-b^2}\right|\leqq\sqrt{\left(\frac{1}{a^2-1}\right)^2+\left(\frac{1}{b^2-1}\right)^2}\leqq\frac{a}{a^2-1}+\frac{b}{1-b^2}$$

各辺を2乗して

$$\frac{a^2}{(a^2-1)^2}-\frac{2ab}{(a^2-1)(1-b^2)}+\frac{b^2}{(1-b^2)^2}$$

$$\leqq\frac{1}{(a^2-1)^2}+\frac{1}{(b^2-1)^2}\leqq\frac{a^2}{(a^2-1)^2}+\frac{2ab}{(a^2-1)(1-b^2)}+\frac{b^2}{(1-b^2)^2}$$

各辺から $\dfrac{a^2}{(a^2-1)^2}+\dfrac{b^2}{(1-b^2)^2}$ を引いて

$$-\frac{2ab}{(a^2-1)(1-b^2)}\leqq-\frac{1}{a^2-1}-\frac{1}{b^2-1}\leqq\frac{2ab}{(a^2-1)(1-b^2)}$$

各辺に $(a^2-1)(1-b^2)$ (>0) を掛けて

$$-2ab\leqq a^2+b^2-2\leqq2ab$$

$-2ab\leqq a^2+b^2-2$ から　$(a+b)^2\geqq2$

$a+b>0$ であるから　$a+b\geqq\sqrt{2}$

$a^2+b^2-2\leqq2ab$ から　$(a-b)^2\leqq2$

$a>b$ であるから　$0<a-b\leqq\sqrt{2}$

したがって，求める a，b の条件は

$a+b\geqq\sqrt{2}$ かつ $0<a-b\leqq\sqrt{2}$ かつ

$a>1$ かつ $0<b<1$

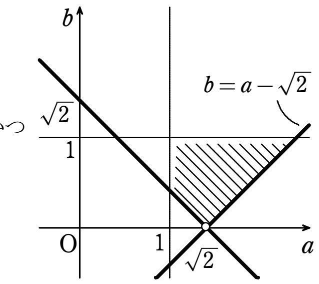
すなわち

$b\geqq-a+\sqrt{2}$ かつ $b<a$ かつ $b\geqq a-\sqrt{2}$ かつ

$a>1$ かつ $0<b<1$

これを図示すると，右の図の斜線部分のようになる。

ただし，境界線は直線 $a=1$，$b=1$ と点 $(\sqrt{2},\ 0)$ は含まず，他は含む。



$\boxed{3}$ ●OP:AP:BP=1:a:b(a>0, b>0)を満たす点Pが存在するa, bの条件[2011]

xy 平面上に 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(1,\ 0)$，B$(0,\ 1)$ がある。

(1)　$a>0$ とする。OP : AP$=1:a$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(2)　$a>0$，$b>0$ とする。OP : AP : BP$=1:a:b$ を満たす点 P が存在するための a，b に対する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。

解説

(1)　$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}=1:a \iff a\mathrm{OP}=\mathrm{AP} \iff a^2\mathrm{OP}^2=\mathrm{AP}^2$

よって，P$(x,\ y)$ とすると　$a^2(x^2+y^2)=(x-1)^2+y^2$

ゆえに　$(a^2-1)x^2+(a^2-1)y^2+2x-1=0$　…… ①

[1]　$a^2-1=0$ $(a>0)$ すなわち $a=1$ のとき

① から　$2x-1=0$　　よって　$x=\dfrac{1}{2}$

[2]　$a^2-1\fallingdotseq 0$ $(a>0)$ すなわち $a\fallingdotseq 1$ のとき

① から　$x^2+y^2+\dfrac{2}{a^2-1}x-\dfrac{1}{a^2-1}=0$

よって　$\left(x+\dfrac{1}{a^2-1}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{a}{a^2-1}\right)^2$　…… ②

[1]，[2] から，求める点 P の軌跡は

$a=1$ のとき　直線 $x=\dfrac{1}{2}$

$a\fallingdotseq 1$ のとき　円 $\left(x+\dfrac{1}{a^2-1}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{a}{a^2-1}\right)^2$

(2)　まず，OP : BP$=1:b$ を満たす点 P の軌跡を求める。

$\mathrm{OP}:\mathrm{BP}=1:b \iff b\mathrm{OP}=\mathrm{BP} \iff b^2\mathrm{OP}^2=\mathrm{BP}^2$

よって，P$(x,\ y)$ とすると　$b^2(x^2+y^2)=x^2+(y-1)^2$

ゆえに　$(b^2-1)x^2+(b^2-1)y^2+2y-1=0$　…… ③

[1]　$b^2-1=0$ $(b>0)$ すなわち $b=1$ のとき

③ から　$2y-1=0$　　よって　$y=\dfrac{1}{2}$

[2]　$b^2-1\fallingdotseq 0$ $(b>0)$ すなわち $b\fallingdotseq 1$ のとき

③ から　$x^2+y^2+\dfrac{2}{b^2-1}y-\dfrac{1}{b^2-1}=0$

よって　$x^2+\left(y+\dfrac{1}{b^2-1}\right)^2=\left(\dfrac{b}{b^2-1}\right)^2$　…… ④

[1]，[2] から，OP : BP$=1:b$ を満たす点 P の軌跡は

$b=1$ のとき　直線 $y=\dfrac{1}{2}$

$b\fallingdotseq 1$ のとき　円 $x^2+\left(y+\dfrac{1}{b^2-1}\right)^2=\left(\dfrac{b}{b^2-1}\right)^2$

OP : AP : BP$=1:a:b$ を満たす点 P が存在するための条件は，①，③ を表す図形が共有点をもつことである。

(i)　$a=1$，$b=1$ のとき

直線 $x=\dfrac{1}{2}$ と直線 $y=\dfrac{1}{2}$ は点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ で交わる。

よって，$a=1$，$b=1$ は適する。

(ii)　$a=1$，$b\fallingdotseq 1$ のとき

直線 $x=\dfrac{1}{2}$ と円 ④ が共有点をもつための条件は，円 ④ の半径について

$\dfrac{b}{|b^2-1|}\geqq\dfrac{1}{2}$　　よって　$|b^2-1|\leqq 2b$

ゆえに　$-2b\leqq b^2-1\leqq 2b$

$-2b\leqq b^2-1$ を解くと　$b\leqq -1-\sqrt{2}$，$-1+\sqrt{2}\leqq b$　…… ⑤

一方，$b^2-1\leqq 2b$ を解くと　$1-\sqrt{2}\leqq b\leqq 1+\sqrt{2}$　…… ⑥

⑤，⑥ と $b>0$，$b\fallingdotseq 1$ の共通範囲を求めると　$-1+\sqrt{2}\leqq b<1$，$1<b\leqq 1+\sqrt{2}$

(iii)　$a\fallingdotseq 1$，$b=1$ のとき

円 ② と直線 $y=\dfrac{1}{2}$ が共有点をもつための条件は，円 ② の半径について

$\dfrac{a}{|a^2-1|}\geqq\dfrac{1}{2}$

(ii) と同様にして，a の範囲を求めると　$-1+\sqrt{2}\leqq a<1$，$1<a\leqq 1+\sqrt{2}$

(iv)　$a\fallingdotseq 1$，$b\fallingdotseq 1$ のとき

円 ② と円 ④ が共有点をもつための条件は，2 つの円の半径と中心間の距離について

$$\left|\frac{a}{|a^2-1|}-\frac{b}{|b^2-1|}\right|\leqq\sqrt{\left(\frac{1}{a^2-1}\right)^2+\left(\frac{1}{b^2-1}\right)^2}\leqq\frac{a}{|a^2-1|}+\frac{b}{|b^2-1|}$$

各辺を 2 乗して，辺々から $\dfrac{a^2}{(a^2-1)^2}+\dfrac{b^2}{(b^2-1)^2}$ を引くと

$$-\frac{2ab}{|a^2-1||b^2-1|}\leqq-\frac{1}{a^2-1}-\frac{1}{b^2-1}\leqq\frac{2ab}{|a^2-1||b^2-1|}$$

よって　$\left|\dfrac{1}{a^2-1}+\dfrac{1}{b^2-1}\right|\leqq\dfrac{2ab}{|a^2-1||b^2-1|}$

ゆえに　$\left(\dfrac{1}{a^2-1}+\dfrac{1}{b^2-1}\right)^2\leqq\left(\dfrac{2ab}{|a^2-1||b^2-1|}\right)^2$

すなわち　$\left\{\dfrac{a^2+b^2-2}{(a^2-1)(b^2-1)}\right\}^2\leqq\left(\dfrac{2ab}{|a^2-1||b^2-1|}\right)^2$

両辺に $(a^2-1)^2(b^2-1)^2$ (>0) を掛けて　$(a^2+b^2-2)^2\leqq(2ab)^2$

したがって　$-2ab\leqq a^2+b^2-2\leqq 2ab$

$-2ab\leqq a^2+b^2-2$ から　$(a+b)^2\geqq 2$

$a+b>0$ であるから　$a+b\geqq\sqrt{2}$　…… ⑦

一方，$a^2+b^2-2\leqq 2ab$ から　$(a-b)^2\leqq 2$

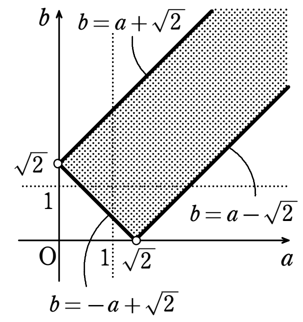
よって　$-\sqrt{2}\leqq a-b\leqq\sqrt{2}$　…… ⑧

(i) ～ (iii) で求めた条件を満たす a，b は，⑦ と ⑧ をともに満たすから，求める a，b の条件は　$a+b\geqq\sqrt{2}$ かつ $-\sqrt{2}\leqq a-b\leqq\sqrt{2}$ かつ $a>0$ かつ $b>0$

すなわち　$b\geqq -a+\sqrt{2}$ かつ $a-\sqrt{2}\leqq b\leqq a+\sqrt{2}$ かつ $a>0$ かつ $b>0$

これを図示すると，右の図の影をつけた部分のようになる。

ただし，境界線上の点は，点 $(\sqrt{2},\ 0)$，$(0,\ \sqrt{2})$ を含まず，他は含む。



$\boxed{4}$ ●[文193]x^3-x^2=p(x-3/2)の異なる実数解の個数[2011 数学ⅠⅡAB(文理)193]

(1)　関数 $y=x^3-x^2$ のグラフをかけ。

(2)　曲線 $y=x^3-x^2$ の接線で，点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ を通るものをすべて求めよ。

(3)　p を定数とする。x の 3 次方程式 $x^3-x^2=p\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$ の異なる実数解の個数を求めよ。

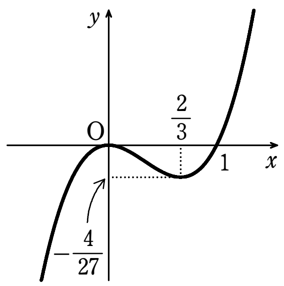
解説

(1)　$y=x^3-x^2$ から　　$y'=3x^2-2x=x(3x-2)$

$y'=0$ とすると　　$x=0,\ \dfrac{2}{3}$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\dfrac{4}{27}$	$\nearrow$



よって，グラフは右の図のようになる。

(2)　曲線 $y=x^3-x^2$ 上の点 $(a,\ a^3-a^2)$ における接線の方程式は

$$y-(a^3-a^2)=(3a^2-2a)(x-a)$$

すなわち　$y=(3a^2-2a)x-2a^3+a^2$　$\cdots\cdots$ ①

この接線が点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ を通るとき　$0=(3a^2-2a)\cdot\dfrac{3}{2}-2a^3+a^2$

整理すると　$4a^3-11a^2+6a=0$

よって　$a(a-2)(4a-3)=0$

ゆえに　$a=0,\ 2,\ \dfrac{3}{4}$

この値を ① に代入して，求める接線の方程式は

$$y=0,\quad y=8x-12,\quad y=\frac{3}{16}x-\frac{9}{32}$$

(3)　x の 3 次方程式 $x^3-x^2=p\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$ $\cdots\cdots$ ② の異なる実数解の個数は，曲線

$y=x^3-x^2$ と直線 $y=p\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$ の共有点の個数に一致する。

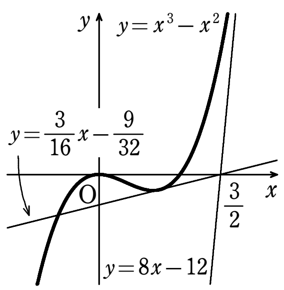
また，直線 $y=p\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$ は点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ を通る傾きが p の直線である。

(2) で求めた接線の傾きに着目すると，② の異なる実数解の個数は

$p<0,\ \dfrac{3}{16}<p<8$ のとき　1 個；

$p=0,\ \dfrac{3}{16},\ 8$ のとき　2 個；

$0<p<\dfrac{3}{16},\ p>8$ のとき　3 個



$\boxed{5}$ ●［3C183］x軸周りの回転体をy軸周りに回転させた回転体の体積［2011　数学ⅢＣ183］

$-\dfrac{1}{4}<s<\dfrac{1}{3}$ とする。xyz 空間内の平面 $z=0$ の上に長方形

$$R_s=\{(x,\ y,\ 0)\mid 1\leqq x\leqq 2+4s,\ 1\leqq y\leqq 2-3s\}$$

がある。長方形 R_s を x 軸の周りに1回転してできる立体を K_s とする。

(1)　立体 K_s の体積 $V(s)$ が最大となるときの s の値，およびそのときの $V(s)$ の値を求めよ。

(2)　s を (1) で求めた値とする。このときの立体 K_s を y 軸の周りに1回転してできる立体 L の体積を求めよ。

解説

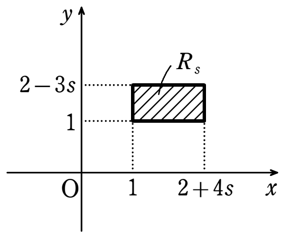
(1)　$V(s)$ は，半径 $2-3s$ の円を底面にもつ高さ

$$(2+4s)-1=1+4s$$

の円柱の体積から，半径1の円を底面にもつ高さ

$$1+4s$$

の円柱の体積を引いたものである。



よって　$V(s)=\pi(2-3s)^2(1+4s)-\pi\cdot 1^2\cdot(1+4s)$

$=\pi(4s+1)(9s^2-12s+3)$

$=3\pi(12s^3-13s^2+1)$

ゆえに　$V'(s)=3\pi(36s^2-26s)=6\pi s(18s-13)$

$V'(s)=0$ とすると　$s=0,\ \dfrac{13}{18}$

$\dfrac{13}{18}>\dfrac{1}{3}$ であるから，$-\dfrac{1}{4}<s<\dfrac{1}{3}$ における $V(s)$ の増減表は次のようになる。

s	$-\frac{1}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$
$V'(s)$		$+$	0	$-$	
$V(s)$		$\nearrow$	3π	$\searrow$	

したがって，$V(s)$ は $s=0$ のとき最大値 3π をとる。

(2)　K_0 を表す連立不等式は　$1\leqq x\leqq 2,\ 1^2\leqq y^2+z^2\leqq 2^2$

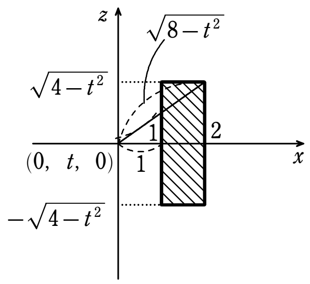
K_0 を平面 $y=t\ (0\leqq t\leqq 2)$ で切ったときの断面を表す連立不等式は

$$1\leqq x\leqq 2,\ 1-t^2\leqq z^2\leqq 4-t^2\quad\cdots\cdots①$$

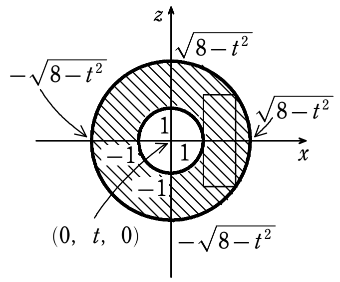
［1］　$1\leqq t\leqq 2$ のとき　$1-t^2\leqq 0$

よって，① が表す図形 D を平面 $y=t$ 上に図示すると，［図1］の斜線部分のようになる。この図形 D を，点 $(0,\ t,\ 0)$ を中心として y 軸の周りに1回転させたとき，図形 D が通過してできる図形 (［図2］の斜線部分) の面積は

$$\pi\left(\sqrt{8-t^2}\right)^2-\pi\cdot 1^2=\pi(7-t^2)$$



［図1］

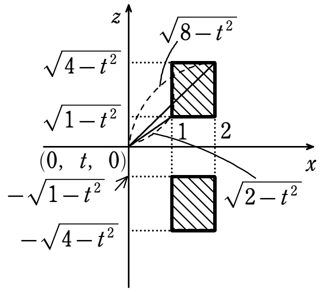


［図2］

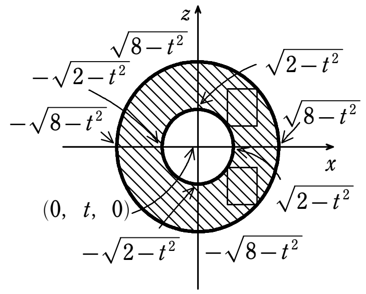
［2］　$0\leqq t\leqq 1$ のとき，① が表す図形 E を平面 $y=t$ 上に図示すると，［図3］の斜線部分のようになる。

この図形 E を，点 $(0,\ t,\ 0)$ を中心として y 軸の周りに1回転させたとき，図形 E が通過してできる図形 (［図4］の斜線部分) の面積は

$$\pi\left(\sqrt{8-t^2}\right)^2-\pi\left(\sqrt{2-t^2}\right)^2=6\pi$$



［図3］



［図4］

立体 L は zx 平面に関して対称であるから，その体積は

$$2\left\{\int_1^2\pi(7-t^2)dt+\int_0^1 6\pi dt\right\}=2\pi\left(\left[7t-\frac{t^3}{3}\right]_1^2+\left[6t\right]_0^1\right)$$

$$=2\pi\left(7-\frac{7}{3}+6\right)=\frac{64}{3}\pi$$

$\boxed{6}$ ●［3C221］与えられた操作を行うとき,行列が逆行列をもつ確率［2011　数学ⅢＣ221］

$A_0=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ とする。整数 $n\geqq 1$ に対して，次の試行により行列 A_{n-1} から行列 A_n を定める。

「数字の組 (1，1)，(1，2)，(2，1)，(2，2) を1つずつ書いた4枚の札が入っている袋から1枚を取り出し，その札に書かれている数字の組が $(i,\ j)$ のとき，A_{n-1} の $(i,\ j)$ 成分に1を加えた行列を A_n とする。」

この試行を n 回 $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$ 繰り返した後に，A_0，A_1，……，A_{n-1} が逆行列をもたず A_n は逆行列をもつ確率を p_n とする。

(1)　p_2，p_3 を求めよ。

(2)　$n-1$ 回 $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$ の試行を繰り返した後に，A_{n-1} の第1行の成分がいずれも正で第2行の成分はいずれも0である確率 q_{n-1} を求めよ。

(3)　p_n $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$ を求めよ。

解説

(1)　A_1 は $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ のいずれかであるから，逆行列をもたない。

A_2 が逆行列をもつのは，A_2 が $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ のいずれかの場合であり，このようになる札の取り出し方は　$2\times2=4$ (通り)

よって　$p_2=\dfrac{4}{4^2}=\dfrac{1}{4}$

試行を 3 回繰り返したとき，A_2 が逆行列をもたず，A_3 が逆行列をもつのは，次のいずれかの場合である。

[1]　A_2 の 4 つの成分のうち，3 つが 0 のとき

1 回目，2 回目は同じ札を取り出し，3 回目はそれと対角線の位置関係にある成分が書かれている札を取り出せばよい。

よって，このときの場合の数は　$1\times4=4$ (通り)

[2]　A_2 の 4 つの成分のうち，2 つが 0 のとき

A_2 は $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$ のいずれかであり，このようになる札の取り出し方はそれぞれ 2 通りである。

3 回目は 0 である 2 つの成分のうち，どちらかの成分が書かれている札を取り出せばよい。よって，このときの場合の数は　$2\times2\times4=16$ (通り)

[1]，[2] から　$p_3=\dfrac{4+16}{4^3}=\dfrac{5}{16}$

(2)　$n-1$ 回の試行のうち，(1，1)，(1，2) の札を少なくとも 1 回取り出し，かつ (2，1)，(2，2) の札を 1 回も取り出さない場合の数は　$2^{n-1}-2$ (通り)

よって　$q_{n-1}=\dfrac{2^{n-1}-2}{4^{n-1}}$

(3)　試行を n 回繰り返したとき，A_1，A_2，……，A_{n-1} が逆行列をもたず，A_n が逆行列をもつのは，次のいずれかの場合である。

[1]　A_{n-1} の 4 つの成分のうち，3 つが 0 のとき

$n-1$ 回目まで同じ札を取り出し，n 回目にそれと対角線の位置関係にある成分が書かれている札を取り出せばよい。

よって，このときの確率は　$\dfrac{1\times4}{4^n}=\dfrac{1}{4^{n-1}}$

[2]　A_{n-1} の 4 つの成分のうち，2 つが 0 のとき

$n-1$ 回目までに，A_{n-1} が

$$\begin{pmatrix}a&b\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a&0\\b&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&a\\0&b\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\a&b\end{pmatrix}\qquad (a,\ b \text{ は自然数})$$

のいずれかになっており，n 回目に 0 である 2 つの成分のうちどちらかの成分が書かれている札を取り出せばよい。

(2) から，$A_{n-1}=\begin{pmatrix}a&b\\0&0\end{pmatrix}$ となる確率は q_{n-1} であり，$\begin{pmatrix}a&0\\b&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&a\\0&b\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0\\a&b\end{pmatrix}$ の場合も同様であるから，このときの確率は

$$q_{n-1}\times\frac{2}{4}\times4=2q_{n-1}$$

[1]，[2] から　$p_n=\dfrac{1}{4^{n-1}}+2q_{n-1}=\dfrac{2^n-3}{4^{n-1}}$