1 ●[文93]カードを3回取り出した3数の最大値, 最小値についての確率[2012 数学ⅠⅡAB(文理)93]

n を2以上の整数とする。1から n までの整数が1つずつ書かれている n 枚のカードがある。ただし，異なるカードには異なる整数が書かれているものとする。この n 枚のカードから，1枚のカードを無作為に取り出して，書かれた整数を調べてからもとに戻す。この試行を3回繰り返し，取り出したカードに書かれた整数の最小値を X，最大値を Y とする。ただし，j と k は正の整数で，$j+k\leqq n$ を満たすとする。また，s は $n-1$ 以下の正の整数とする。

(1)　$X\geqq j$ かつ $Y\leqq j+k$ となる確率を求めよ。

(2)　$X=j$ かつ $Y=j+k$ となる確率を求めよ。

(3)　$Y-X=s$ となる確率を $P(s)$ とする。$P(s)$ を求めよ。

(4)　n が偶数のとき，$P(s)$ を最大にする s を求めよ。

解説

(1)　$X\geqq j$ かつ $Y\leqq j+k$ となるのは，3回とも j 以上 $j+k$ 以下のカードを引く場合である。

j 以上 $j+k$ 以下のカードの枚数は　　$(j+k)-j+1=k+1$ (枚)

よって，求める確率は　　$\dfrac{(k+1)^3}{n^3}$

(2)　$X=j$ かつ $Y=j+k$ となるのは，取り出したカードに書かれた3つの整数が $j,\ j+a,\ j+k$　$(a=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k)$　のときで，次の3つの場合に分けられる。

[1]　3つの整数が $j,\ j,\ j+k$ のとき

このようになる取り出し方は　　3通り

[2]　3つの整数が $j,\ j+k,\ j+k$ のとき

このようになる取り出し方も　　3通り

[3]　3つの整数が $j,\ j+a,\ j+k$ $(a=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k-1)$ のとき

a がとりうる整数は $k-1$ 通りあり，$j,\ j+a,\ j+k$ を取り出す順序が $3!=6$ 通りあるから，このようになる取り出し方は　　$6(k-1)$ 通り

以上から，$X=j$ かつ $Y=j+k$ となる場合の数は

$$3+3+6(k-1)=6k\ (\text{通り})$$

よって，求める確率は　　$\dfrac{6k}{n^3}$

(3)　$Y-X=s$ となるのは，$X=j,\ Y=j+s$　$(j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-s)$ の場合である。

よって，(2) から　　$P(s)=\dfrac{6s}{n^3}\times(n-s)=\dfrac{6s(n-s)}{n^3}$

(4)　$P(s)$ は s についての2次関数で，平方完成すると

$$P(s)=-\frac{6}{n^3}(s^2-ns)=-\frac{6}{n^3}\left(s-\frac{n}{2}\right)^2+\frac{3}{2n}$$

n は偶数であるから，$\dfrac{n}{2}$ は整数である。また，$n\geqq 2$ であるから　　$1\leqq\dfrac{n}{2}\leqq n-1$

よって，$P(s)$ を最大にする s は　　$s=\dfrac{n}{2}$

2 ●[文127]傾きが変化する直線と原点の距離の最大・最小[2012 数学ⅠⅡAB(文理)127]

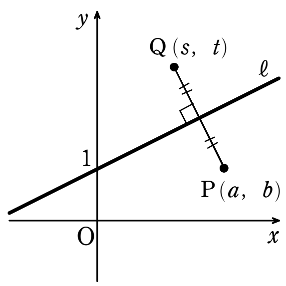
xy 平面上に，点 $(0,\ 1)$ を通り，傾きが h の直線 ℓ がある。

(1)　xy 平面において，ℓ に関して点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ と対称な点を $\mathrm{Q}(s,\ t)$ とする。このとき，$a,\ b,\ h$ を用いて $s,\ t$ を表せ。ただし，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ は ℓ 上にないとする。

(2)　xy 平面において，ℓ に関して原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ と対称な点を A とする。h が $-1\leqq h\leqq 1$ の範囲を動くとき，線分 OA の長さの最大値と最小値を求めよ。

(3)　h が $-1\leqq h\leqq 1$ の範囲を動くときの点 A の軌跡を C とする。C と直線 $y=1$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

解説



(1)　直線 ℓ の方程式は　　$y=hx+1$

線分 PQ の中点 $\left(\dfrac{a+s}{2},\ \dfrac{b+t}{2}\right)$ は直線 ℓ 上にあるから

$$\frac{b+t}{2}=h\cdot\frac{a+s}{2}+1$$

よって　　$hs-t=-ha+b-2$　……①

$h\neq 0$ のとき，直線 PQ の傾きは　　$\dfrac{t-b}{s-a}$

PQ と ℓ は垂直であるから　　$\dfrac{t-b}{s-a}\times h=-1$

よって　　$s+ht=a+hb$　……②

$h=0$ のとき $s=a$ であるから，② は $h=0$ のときにも成り立つ。

①×h+② から　　$(h^2+1)s=(-h^2+1)a+2hb-2h$

②×h−① から　　$(h^2+1)t=2ha+(h^2-1)b+2$

$h^2+1\neq 0$ であるから

$$s=\frac{(-h^2+1)a+2hb-2h}{h^2+1},\quad t=\frac{2ha+(h^2-1)b+2}{h^2+1}$$

(2)　(1) の $s,\ t$ の式で $a=0,\ b=0$ とすると

$$s=-\frac{2h}{h^2+1},\ t=\frac{2}{h^2+1}$$

よって，A の座標は $\left(-\dfrac{2h}{h^2+1},\ \dfrac{2}{h^2+1}\right)$ であるから

$$\mathrm{OA}=\sqrt{\left(-\frac{2h}{h^2+1}\right)^2+\left(\frac{2}{h^2+1}\right)^2}=\sqrt{\frac{4(h^2+1)}{(h^2+1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{h^2+1}}$$

h が $-1\leqq h\leqq 1$ の範囲を動くとき，h^2+1 は $h=0$ で最小値1をとり，$h=\pm 1$ で最大値2をとる。

よって，線分 OA の長さは，$h=0$ で最大値2をとり，$h=\pm 1$ で最小値 $\sqrt{2}$ をとる。

(3)　A の座標を $(x,\ y)$ とすると

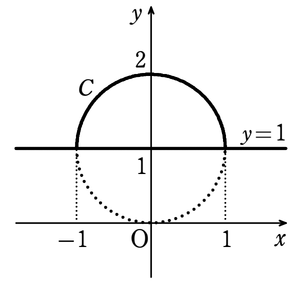
$$x=-\frac{2h}{h^2+1}\ \text{……③},\quad y=\frac{2}{h^2+1}\ \text{……④}$$

③，④ から　　$x=-hy$

$-1\leqq h\leqq 1$ と ④ から　　$1\leqq y\leqq 2$　……⑤

$y\neq 0$ であるから　　$h=-\dfrac{x}{y}$

これを ④ に代入すると　　$y=\dfrac{2}{\left(-\dfrac{x}{y}\right)^2+1}=\dfrac{2y^2}{x^2+y^2}$



よって　　$y(x^2+y^2)=2y^2$

両辺を y で割って　　$x^2+y^2=2y$

したがって　　$x^2+(y-1)^2=1$　……⑥

⑤，⑥ から，C は点 $(0,\ 1)$ を中心とする半径1の円の $1\leqq y\leqq 2$ の部分である。

よって，求める面積は　　$\pi\cdot 1^2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{2}$

$\boxed{3}$ ●[理213]3次曲線外から引いた接線に囲まれた2つの図形の面積比[2012 数学ⅠⅡAB(理)213]

a を正の定数とし，xy 平面上の曲線 C の方程式を $y=x^3-a^2x$ とする。

(1) C 上の点 A$(t,\ t^3-a^2t)$ における C の接線を ℓ とする。ℓ と C で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。ただし，t は 0 でないとする。

(2) b を実数とする。C の接線のうち xy 平面上の点 B$(2a,\ b)$ を通るものの本数を求めよ。

(3) C の接線のうち点 B$(2a,\ b)$ を通るものが 2 本のみの場合を考え，それらの接線を ℓ_1，ℓ_2 とする。ただし，ℓ_1 と ℓ_2 はどちらも原点 $(0,\ 0)$ を通らないとする。ℓ_1 と C で囲まれた図形の面積を S_1 とし，ℓ_2 と C で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1 \geqq S_2$ として，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。

解説

(1) $y=x^3-a^2x$ ……① から　$y'=3x^2-a^2$

よって，点 A$(t,\ t^3-a^2t)$ における C の接線 ℓ の方程式は

$$y-(t^3-a^2t)=(3t^2-a^2)(x-t)$$

すなわち　$y=(3t^2-a^2)x-2t^3$ ……②

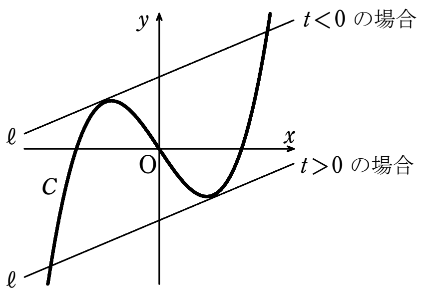
①，② から y を消去すると　$x^3-a^2x=(3t^2-a^2)x-2t^3$

ゆえに　$x^3-3t^2x+2t^3=0$

$$(x-t)^2(x+2t)=0$$

したがって　$x=-2t,\ t$

接線 ℓ と曲線 C の位置関係は，$t>0$ の場合と $t<0$ の場合で右のようになる。



よって，$t>0$ のとき

$$\begin{aligned}
S(t) &= \int_{-2t}^{t}\{x^3-a^2x-(3t^2-a^2)x+2t^3\}dx \\
&= \int_{-2t}^{t}(x-t)^2(x+2t)dx \\
&= \int_{-2t}^{t}(x-t)^2\{(x-t)+3t\}dx \\
&= \int_{-2t}^{t}\{(x-t)^3+3t(x-t)^2\}dx \\
&= \left[\frac{(x-t)^4}{4}+t(x-t)^3\right]_{-2t}^{t} = -\left\{\frac{(-3t)^4}{4}+t(-3t)^3\right\} = \frac{27}{4}t^4
\end{aligned}$$

$t<0$ のとき

$$\begin{aligned}
S(t) &= \int_{t}^{-2t}\{(3t^2-a^2)x-2t^3-(x^3-a^2x)\}dx = -\int_{t}^{-2t}(x-t)^2(x+2t)dx \\
&= \int_{-2t}^{t}(x-t)^2(x+2t)dx = \frac{27}{4}t^4
\end{aligned}$$

したがって　$S(t)=\dfrac{27}{4}t^4$

(2) 直線 ② が点 $(2a,\ b)$ を通るとき　$b=(3t^2-a^2)\cdot 2a-2t^3$

すなわち　$b=-2t^3+6at^2-2a^3$ ……③

接線の本数は t についての 3 次方程式 ③ の実数解の個数と等しいから，2 つのグラフ $y=-2t^3+6at^2-2a^3$ と $y=b$ の共有点の個数を考えればよい。

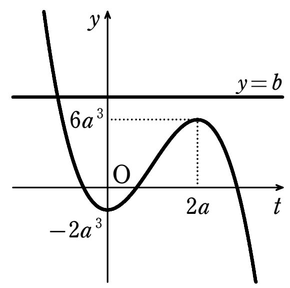
$y=-2t^3+6at^2-2a^3$ より　$y'=-6t^2+12at=-6t(t-2a)$

$y'=0$ とすると　$t=0,\ 2a$

$a>0$ であるから，$f(t)$ の増減表は右のようになる。

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	$-2a^3$	↗	$6a^3$	↘

よって，右下のグラフから，共有点の個数すなわち接線の本数は



$b<-2a^3$，$6a^3<b$ のとき　1 本

$b=-2a^3$，$6a^3$ のとき　2 本

$-2a^3<b<6a^3$ のとき　3 本

(3) (2) から　$b=-2a^3,\ 6a^3$

[1] $b=-2a^3$ のとき

③ から　$-2a^3=-2t^3+6at^2-2a^3$

$$t^3-3at^2=0$$

$$t^2(t-3a)=0$$

よって　$t=0,\ 3a$

$t=0$ のとき，接線は原点を通るから，不適。

[2] $b=6a^3$ のとき

③ から　$6a^3=-2t^3+6at^2-2a^3$

$$t^3-3at^2+4a^3=0$$

$$(t+a)(t-2a)^2=0$$

よって　$t=-a,\ 2a$

(1) から，$t=-a$ のとき，接線と曲線 C で囲まれた図形の面積は　$S(-a)=\dfrac{27}{4}a^4$

$t=2a$ のとき，接線と曲線 C で囲まれた図形の面積は　$S(2a)=\dfrac{27}{4}\times 16a^4$

$S(2a)>S(-a)$ であるから　$S_1=S(2a)$，$S_2=S(-a)$

したがって　$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{27}{4}\times 16a^4\times\dfrac{4}{27a^4}=16$

$\boxed{4}$ ●[文265]s=3^(r−1)mとしたとき2^s+1は3^rで割り切れることの証明[2012 数学ⅠⅡAB(文理)265]

m を正の奇数とする。

(1) $(x-1)^{101}$ の展開式における x^2 の項の係数を求めよ。

(2) p を正の整数とするとき，$(p-1)^m+1$ は p で割り切れることを示せ。

(3) r を正の整数とし，$s=3^{r-1}m$ とする。2^s+1 は 3^r で割り切れることを示せ。

解説

(1) $(x-1)^{101}$ の展開式の一般項は　${}_{101}\mathrm{C}_r x^{101-r}(-1)^r={}_{101}\mathrm{C}_r(-1)^r x^{101-r}$

x^2 の項は $r=99$ のときで，その係数は

$${}_{101}\mathrm{C}_{99}(-1)^{99}={}_{101}\mathrm{C}_2(-1)^{99}=\frac{101\cdot 100}{2\cdot 1}\cdot(-1)=-5050$$

(2) 二項定理により

$$(p-1)^m+1={}_m\mathrm{C}_0 p^m+{}_m\mathrm{C}_1(-1)p^{m-1}+\cdots\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}(-1)^{m-1}p+{}_m\mathrm{C}_m(-1)^m+1$$

ここで，m は奇数であるから　$(-1)^m=-1$

したがって　$(p-1)^m+1=p^m+{}_m\mathrm{C}_1(-1)p^{m-1}+\cdots\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}(-1)^{m-1}p$

$$=p\{p^{m-1}+{}_m\mathrm{C}_1(-1)p^{m-2}+\cdots\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}(-1)^{m-1}\}$$

$p^{m-1}+{}_m\mathrm{C}_1(-1)p^{m-2}+\cdots\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}(-1)^{m-1}$ は整数であるから，$(p-1)^m+1$ は p で割り切れる。

(3) 「2^s+1 は 3^r で割り切れる」……(A)

このことを r に関する数学的帰納法を用いて証明する。

[1] $r=1$ のとき

$s=3^{r-1}m=m$ であるから　$2^s+1=2^m+1=(3-1)^m+1$

よって，(2) の結果から，2^s+1 は 3 で割り切れる。

ゆえに，$r=1$ のとき，(A) は成り立つ。

[2] $r=k$ のとき (A) が成り立つ，すなわち 2^s+1 が 3^k で割り切れると仮定する。

このとき，$2^s+1=3^kn$ すなわち $2^{3^{k-1}m}+1=3^kn$ を満たす整数 n が存在する。

よって　$2^{3^{k-1}m}=3^kn-1$

$r=k+1$ のとき　$2^s+1=2^{3^km}+1$

$$\begin{aligned}
&=(2^{3^{k-1}m})^3+1=(3^kn-1)^3+1 \\
&=\{(3^kn)^3-3\cdot(3^kn)^2+3\cdot 3^kn-1\}+1 \\
&=3^{k+1}(3^{2k-1}n^3-3^kn^2+n)
\end{aligned}$$

よって，2^s+1 は 3^{k+1} で割り切れる。

したがって，$r=k+1$ のときも (A) は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての正の整数 r に対して，(A) は成り立つ。

$\boxed{5}$ ●[理268]s=3^(r−1)mとしたとき2^s+1は3^rで割り切れることの証明[2012 数学ⅠⅡＡＢ(理)268]

m，p を 3 以上の奇数とし，m は p で割り切れないとする。

(1)　$(x-1)^{101}$ の展開式における x^2 の項の係数を求めよ。

(2)　$(p-1)^m+1$ は p で割り切れることを示せ。

(3)　$(p-1)^m+1$ は p^2 で割り切れないことを示せ。

(4)　r を正の整数とし，$s=3^{r-1}m$ とする。2^s+1 は 3^r で割り切れることを示せ。

(解説)

(1)　展開式の一般項は　$_{101}\mathrm{C}_r\, x^{101-r}(-1)^r$

よって，x^2 の項は $r=99$ のときで，その係数は

$$_{101}\mathrm{C}_{99}(-1)^{99}={}_{101}\mathrm{C}_2\times(-1)=-\frac{101\times100}{2\times1}=-5050$$

(2)　二項定理により

$$(p-1)^m+1={}_m\mathrm{C}_0p^m+{}_m\mathrm{C}_1(-1)p^{m-1}+\cdots\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}(-1)^{m-1}p+{}_m\mathrm{C}_m(-1)^m+1$$

ここで，m は奇数であるから　$(-1)^m=-1$

したがって

$$(p-1)^m+1=p^m+{}_m\mathrm{C}_1(-1)p^{m-1}+\cdots\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}(-1)^{m-1}p$$

$$=p\{p^{m-1}+{}_m\mathrm{C}_1(-1)p^{m-2}+\cdots\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}(-1)^{m-1}\}\quad\cdots\cdots①$$

$p^{m-1}+{}_m\mathrm{C}_1(-1)p^{m-2}+\cdots\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}(-1)^{m-1}$ は整数であるから，$(p-1)^m+1$ は p で割り切れる。

(3)　① から

$$(p-1)^m+1$$

$$=p^2\{p^{m-2}+{}_m\mathrm{C}_1(-1)p^{m-3}+\cdots\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-2}(-1)^{m-2}\}+{}_m\mathrm{C}_{m-1}(-1)^{m-1}p$$

$$=p^2\{p^{m-2}+{}_m\mathrm{C}_1(-1)p^{m-3}+\cdots\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-2}(-1)^{m-2}\}+mp$$

ここで，m は p で割り切れないから，mp は p^2 で割り切れない。

また，$p^{m-2}+{}_m\mathrm{C}_1(-1)p^{m-3}+\cdots\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-2}(-1)^{m-2}$ は整数である。

よって，$(p-1)^m+1$ は p^2 で割り切れない。

(4)　「2^s+1 は 3^r で割り切れる」…… ② とする。

② を r に関する数学的帰納法を用いて証明する。

[1]　$r=1$ のとき

$s=3^{r-1}m=m$ であるから　　$2^s+1=2^m+1=(3-1)^m+1$

よって，(2) の結果から，2^s+1 は 3 で割り切れる。

ゆえに，$r=1$ のとき，② は成り立つ。

[2]　$r=k$ のとき ② が成り立つ，すなわち $2^s+1=2^{3^{k-1}m}+1$ が 3^k で割り切れると仮定する。

このとき，$2^{3^{k-1}m}+1=3^kn$ を満たす整数 n が存在する。

よって　　$2^{3^{k-1}m}=3^kn-1$

$r=k+1$ のとき

$$2^s+1=2^{3^km}+1=\left(2^{3^{k-1}m}\right)^3+1=(3^kn-1)^3+1$$

$$=\{(3^kn)^3-3\cdot(3^kn)^2+3\cdot3^kn-1\}+1$$

$$=3^{3k}n^3-3^{2k+1}n^2+3^{k+1}n=3^{k+1}(3^{2k-1}n^3-3^kn^2+n)$$

$3^{2k-1}n^3-3^kn^2+n$ は整数であるから，2^s+1 は 3^{k+1} で割り切れる。

したがって，$r=k+1$ のときも ② は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての正の整数 r に対して，② は成り立つ。

$\boxed{6}$ ●[3C117]定積分で表された関数の列fn. f(2n)を推測して求める[2012 数学ⅢC117]

$f_0(x)=xe^x$ として，正の整数 n に対して，$f_n(x)=\int_{-x}^{x} f_{n-1}(t)\,dt+f'_{n-1}(x)$ により実数 x の関数 $f_n(x)$ を定める。

(1)　$f_1(x)$ を求めよ。

(2)　$g(x)=\int_{-x}^{x}(at+b)e^t\,dt$ とするとき，定積分 $\int_{-c}^{c} g(x)\,dx$ を求めよ。ただし，実数 a，b，c は定数とする。

(3)　正の整数 n に対して，$f_{2n}(x)$ を求めよ。

解説

(1)　$f_1(x)=\int_{-x}^{x} f_0(t)\,dt+f'_0(x)=\int_{-x}^{x} te^t\,dt+(e^x+xe^x)$

$$=\Big[te^t\Big]_{-x}^{x}-\int_{-x}^{x} e^t\,dt+(x+1)e^x$$

$$=xe^x+xe^{-x}-\Big[e^t\Big]_{-x}^{x}+(x+1)e^x=2xe^x+(x+1)e^{-x}$$

(2)　任意の実数 x に対して

$$g(-x)=\int_{x}^{-x}(at+b)e^t\,dt=-\int_{-x}^{x}(at+b)e^t\,dt=-g(x)$$

よって，$g(x)$ は奇関数であるから　　$\int_{-c}^{c} g(x)\,dx=0$

(3)　$f_1(x)=2xe^x+(x+1)e^{-x}$,

$f'_1(x)=(2e^x+2xe^x)+\{e^{-x}-(x+1)e^{-x}\}=2(x+1)e^x-xe^{-x}$　であるから

$$f_2(x)=\int_{-x}^{x} f_1(t)\,dt+f'_1(x)=\int_{-x}^{x}\{2te^t+(t+1)e^{-t}\}\,dt+2(x+1)e^x-xe^{-x}$$

$$=\Big[2te^t\Big]_{-x}^{x}-\int_{-x}^{x} 2e^t\,dt+\Big[-(t+1)e^{-t}\Big]_{-x}^{x}+\int_{-x}^{x} e^{-t}\,dt+2(x+1)e^x-xe^{-x}$$

$$=2xe^x+2xe^{-x}-\Big[2e^t\Big]_{-x}^{x}-(x+1)e^{-x}$$

$$+(-x+1)e^x+\Big[-e^{-t}\Big]_{-x}^{x}+2(x+1)e^x-xe^{-x}$$

$$=(3x+2)e^x$$

よって，$f_{2n}(x)=(a_nx+b_n)e^x$　…… ① のように表されると推測できる。

① が成り立つことを数学的帰納法により証明する。

[1]　$n=1$ のとき

$f_2(x)=(3x+2)e^x$ であるから，$f_2(x)$ は ① のように表される。

[2]　$n=k$ のとき $f_{2n}(x)$ が ① のように表されると仮定する。

すなわち，$f_{2k}(x)=(a_kx+b_k)e^x$ と表される。

$$f_{2(k+1)}(x)=\int_{-x}^{x} f_{2k+1}(t)\,dt+f'_{2k+1}(x)$$

$$=\int_{-x}^{x}\left\{\int_{-t}^{t} f_{2k}(u)\,du+f'_{2k}(t)\right\}dt+f'_{2k+1}(x)$$

$f_{2k}(x)=(a_kx+b_k)e^x$ であるから，(2) の結果より　　$\int_{-x}^{x}\left(\int_{-t}^{t} f_{2k}(u)\,du\right)dt=0$

したがって　　$f_{2(k+1)}(x)=\int_{-x}^{x} f'_{2k}(t)\,dt+\left\{\int_{-x}^{x} f_{2k}(t)\,dt+f'_{2k}(x)\right\}'$

$$=f_{2k}(x)-f_{2k}(-x)+\{f_{2k}(x)+f_{2k}(-x)+f''_{2k}(x)\}$$

$$=2f_{2k}(x)+f''_{2k}(x)$$

$f'_{2k}(x)=(a_kx+a_k+b_k)e^x$，$f''_{2k}(x)=(a_kx+2a_k+b_k)e^x$ であるから

$$f_{2(k+1)}(x)=2(a_kx+b_k)e^x+(a_kx+2a_k+b_k)e^x=(3a_kx+2a_k+3b_k)e^x$$

$a_{k+1}=3a_k$ …… ②，$b_{k+1}=2a_k+3b_k$ …… ③ とおくと，

$f_{2(k+1)}(x)=(a_{k+1}x+b_{k+1})e^x$ と表される。

よって，$n=k+1$ のときも $f_{2n}(x)$ は ① のように表される。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について，$f_{2n}(x)=(a_nx+b_n)e^x$ のように表される。

② より，$\{a_n\}$ は初項 $a_1=3$，公比 3 の等比数列であるから　　$a_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$

これを ③ に代入すると　　$b_{n+1}=3b_n+2\cdot 3^n$

両辺を 3^{n+1} で割ると　　$\dfrac{b_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{b_n}{3^n}+\dfrac{2}{3}$

よって，数列 $\left\{\dfrac{b_n}{3^n}\right\}$ は，初項 $\dfrac{b_1}{3}=\dfrac{2}{3}$，公差 $\dfrac{2}{3}$ の等差数列であるから

$$\frac{b_n}{3^n}=\frac{2}{3}+(n-1)\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}n$$

よって　　$b_n=3^n\cdot\dfrac{2}{3}n=2\cdot 3^{n-1}\cdot n$

ゆえに　　$f_{2n}(x)=(3^nx+2\cdot 3^{n-1}\cdot n)e^x=3^{n-1}(3x+2n)e^x$